1. 두 점 $A(2,\ 0)$, $B(-2,\ 4)$ 에 대하여 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표를 구하면?

① $(2,2)$ ② $(0,2)$ ③ $(4,4)$ ④ $(0,0)$ ⑤ $(4,1)$

해설

$\overline{AB}$ 의 중점은 $\left(\dfrac{2+(-2)}{2}, \dfrac{0+4}{2}\right) = (0,2)$

2. 집합 $A = \{2, 3, 5, 7\}$ 의 부분집합 중 원소 2를 반드시 포함하고 3을 포함하지 않는 부분집합의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

집합 A 에서 원소 2를 반드시 포함하고, 3을 포함하지 않는 부분집합을 구하면 $\{2\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{2, 5, 7\}$ 이므로 4개이다.

3. 두 집합 $A = \{x|x$는 24의 약수$\}$, $B = \{x|x$는 28의 약수$\}$ 에 대하여 $n(A \cap B)$ 를 구하여라.

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

$B = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$

$A \cap B = \{1, 2, 4\}$

$n(A \cap B) = 3$

4. 명제 $p \rightarrow \sim q$ 의 대우는?

① $p \rightarrow q$ ② $\sim q \rightarrow p$ ③ $\sim q \rightarrow \sim p$

④ $\sim p \rightarrow q$ ⑤ $q \rightarrow \sim p$

해설

$p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$, $p \rightarrow \sim q$ 의 대우는 $\sim(\sim q) \rightarrow \sim p$

$\therefore q \rightarrow \sim p$

5. 두 점 $\mathrm{A}(a, 4)$, $\mathrm{B}(1, b)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 하면, $\triangle\mathrm{OPQ}$의 무게중심은 $\mathrm{G}(-1, 1)$이다. 이때, $a-b$의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$\mathrm{P}(x, 0)$, $\mathrm{Q}(0, y)$라 하면,

$\dfrac{0+x+0}{3} = -1$, $\dfrac{0+0+y}{3} = 1$에서

$x = -3$, $y = 3$

$\therefore \mathrm{P}(-3, 0), \mathrm{Q}(0, 3)$

$\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2$에서

$(a+3)^2 + 4^2 = (1+3)^2 + b^2$

$a^2 + 6a + 9 = b^2$

$\overline{\mathrm{QA}}^2 = \overline{\mathrm{QB}}^2$에서

$a^2 + (4-3)^2 = 1^2 + (b-3)^2$

$a^2 = b^2 - 6b + 9$

두 식을 변변 빼고 정리하면 $a - b = -3$

6. 원점에서 직선 $3x-4y-5=0$에 이르는 거리를 구하면?

▶ **답 :**

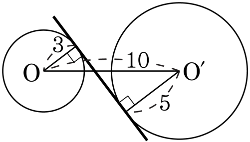
▷ **정답 :** 1

해설

점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하면,

$$\frac{|0\times3+0\times(-4)-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

7. 다음 그림의 두 원 O와 O′ 에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3+5)^2} = 6$

8. 다음 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=x+5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

9. 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼 평행이동한 다음 직선 $x = a$ 에 대하여 대칭이동하면 처음 위치로 돌아온다. 이 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

먼저 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼
평행이동한 점의 좌표는
$(-1+6, -2)$, 즉 $(5, -2)$
점 $(5, -2)$ 를 다시 직선 $x = a$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는
$(2a-5, -2)$
이 때, 이것이 $(-1, -2)$ 와 같으므로 $2a-5=-1$
$\therefore a = 2$

10. 점 P $(2,\ 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 Q, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 R 라 할 때, 세 점 P, Q, R 를 세 꼭짓점으로 하는 $\triangle$PQR 의 넓이를 구하여라.

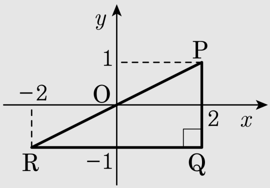
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

점 P $(2, 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동
한
점 Q 는 Q $(2, -1)$
또, 점 P $(2, 1)$ 을 원점에 대하여
대칭이동한 점 R 는 R $(-2, -1)$
따라서, 다음 그림에서 세 점
P $(2, 1)$, Q $(2, -1)$, R $(-2, -1)$ 을
꼭짓점으로 하는$\triangle$PQR 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$



11. 다음 중 집합 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 를 조건제시법으로 나타낸 것으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\{x \mid x$는 9 이하의 홀수$\}$

② $\{x \mid x$는 10 이하의 홀수$\}$

③ $\{x \mid x$는 11 미만의 홀수$\}$

④ $\{x \mid x$는 9보다 작은 홀수$\}$

⑤ $\{x \mid x$는 9 이하의 자연수 중 2로 나누었을 때 나머지가 1 인 수$\}$

해설

④ $\{1, 3, 5, 7\}$

12. a를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2+y^2+2ax-2ay+8a-15=0$의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ 2　　④ $2\sqrt{2}$　　⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}(x+a)^2+(y-a)^2 &= 2a^2-8a+15\\ &= 2(a-2)^2+7\\ &= (\text{반지름})^2\end{aligned}$$

따라서 $a=2$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(-a,\ a)=(-2,\ 2)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

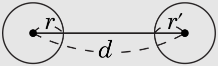
$=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

13. 두 원 $C_1 : x^2 + y^2 = r^2$, $C_2 : (x-6)^2 + (y-8)^2 = 4$에 대하여 공통접선의 개수가 4개가 되도록 하는 양의 정수 r의 개수는?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

공통접선이 4개인 경우 $r + r' < d$인 경우



$C_1 \;\Rightarrow\; (0,\ 0)\ r = r'$

$C_2 \;\Rightarrow\; (6,\ 8)\ r = 2$

중심거리 $(d) = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$\therefore\ r + 2 < 10$

$r < 8$ (단, $r > 0$)

r의 갯수는 $r = 1,\ 2,\ 3 \cdots 7$이므로 7개이다.

14. 두 점 A(3, 2), B(6, 5)에 대하여 $2\overline{AP} = \overline{BP}$를 만족시키는 점을 P라 할 때, 점 P와 직선 $x + y + 3 = 0$ 사이의 거리의 최솟값은?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$2\overline{AP} = \overline{BP}$에서 $4\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓으면

$4\left\{(x-3)^2 + (y-2)^2\right\} = (x-6)^2 + (y-5)^2$

$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$

$\therefore\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 8$

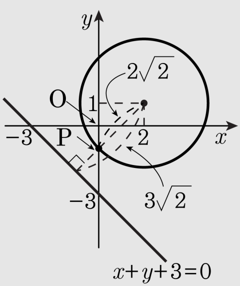
따라서 점 는 중심이 $(2,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원 위를 움직인다.

이때, 원의 중심 $(2,\ 1)$과 직선 $x + y + 3 = 0$

사이의 거리는 $\dfrac{|2+1+3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3\sqrt{2}$이므로

아래 그림에서 점 P와 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리의 최솟값은

$3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$



15. 원 $(x-2)^2+(y-3)^2=5$ 를 원 $(x+1)^2+(y-5)^2=5$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $x+3y+2=0$ 은 직선 $x+ay+b=0$ 으로 옮겨진다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=2$

해설

원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동과 일치하므로
주어진 두 원의 중심의 좌표를 구하면
$(x-2)^2+(y-3)^2=5 \to$ 원의 중심 :$(2,3)$
$(x+1)^2+(y-5)^2=5 \to$ 원의 중심 :$(-1,5)$
점 $(-1,\ 5)$ 는 점 $(2,3)$ 을 x 축의 방향으로
-3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행 이동한 것이다.
따라서 직선 $x+3y+2=0$ 을 x 축의 방향으로
-3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$(x+3)+3(y-2)+2=0$
$\therefore\ x+3y-1=0 \ \cdots$ ㉠
㉠ 이 $x+ay+b=0$ 과 일치하므로
$a=3$, $b=-1$ $\therefore a+b=2$

16. $A = \{x \mid x$는 30 이하의 4의 배수$\}$, $B = \{4,\ 28,\ 16,\ 8,\ a,\ b,\ 20\}$ 인 집합 A, B 에 대하여 $A = B$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

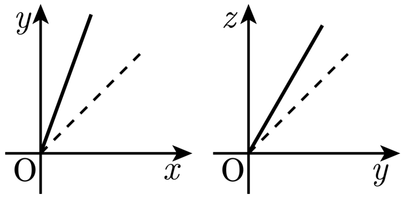
▶ 답 :

▷ 정답 : 36

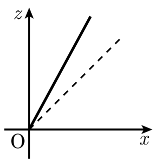
해설

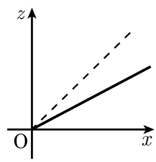
$A = \{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ 28\}$ 이고
$B = \{4,\ 8,\ 16,\ 20,\ 28,\ a,\ b\}$ 이므로
$a + b = 12 + 24 = 36$ 이다.

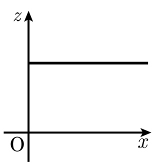
17. 세 변수 x, y, z 에 대하여 아래의 두 그래프(실선)는 각각 x 와 y , y 와 z 사이의 관계를 나타낸 것이다.

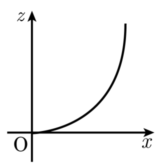


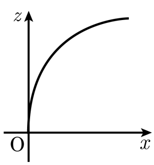
이때, x 와 z 사이의 관계를 그래프로 나타내면? (단, 점선은 원점을 지나고 기울기가 1 인 직선이다.)

①


②


③


④


⑤


해설

주어진 그래프에서 x, y, z 사이의 관계를 식으로 나타내면 $y = ax(a > 1)$, $z = by(b > 1)$

$\therefore\ z = b(ax) = abx\ (ab > 1)$

따라서, $z = abx$ 의 그래프는 보기의 ①과 같다.

18. 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$으로 부터의 거리의 비가 $3\ :\ 1$인 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

해설

주어진 조건에서 $\overline{\mathrm{AP}}\ :\ \overline{\mathrm{BP}}=3\ :\ 1$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=3\overline{\mathrm{BP}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}^2=9\overline{\mathrm{BP}}^2$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 놓으면

$(x+3)^2+y^2=9\,\big(x-1)^2+y^2\big\}$

$x^2+y^2-3x=0\ \therefore\ \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$

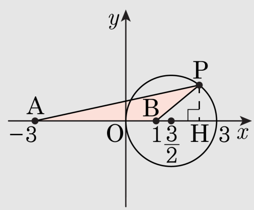
따라서 점 P는 중심이 좌표가 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$이고

반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$인 원 위를 움직인다.

그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선

의 발을

H라 하면



$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{PH}}$

이 때, $\overline{\mathrm{AB}}=4$이고 $\overline{\mathrm{PH}}$

의 길이의 최댓값은 반지름의 길이

$\frac{3}{2}$이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{3}{2}=3$

19. 다음은 집합 $A = \{x \mid x$는 20 미만의 소수$\}$ 에 대하여 원소의 개수와 진부분집합의 개수를 바르게 구한 것은?

① 5, 31 ② 6, 63 ③ 7, 127

④ 8, 255 ⑤ 9, 511

해설

$A = \{x \mid x$는 20 미만의 소수$\}$ 를 원소나열법으로 고치면 $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$이므로 원소의 개수는 8 개이다.

(진부분집합의 개수) = (부분집합의 개수) − 1

이므로 부분집합의 개수는 $2^8 = 256$ 이고

진부분집합의 개수는 $256 - 1 = 255$ (개) 이다.

20. 어느 반의 63%의 학생은 공부를 잘하고 76%의 학생은 운동을 잘한다. 운동도 잘하고 공부도 잘하는 학생수의 최대, 최소 %(백분율)는 각각 얼마인가?

① 최대 89%, 최소 13%
② 최대 63%, 최소 39%
③ 최대 76%, 최소 37%
④ 최대 39%, 최소 24%
⑤ 최대 76%, 최소 39%

해설

전체집합을 U, 공부를 잘하는 학생의 집합을 A, 운동을 잘하는 학생의 집합을 B 라 하면 공부도, 운동도 잘하는 학생의 집합은 $A \cap B$ 이다. $A \cap B$ 의 원소의 개수는 $A \subset B$ 일 때 최대가 되고, $A \cap B$ 의 원소의 개수는 $A \cup B = U$ 일 때 최소가 된다. $A \subset B$ 일 때 $A \cap B = A$ 이므로 $n(A \cap B) = n(A) = 63\%$
$A \cup B = U$ 일 때 $n(A \cup B) = 100\%$ 이므로 $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(U) = 63 + 76 - 100 = 39(\%)$
따라서, 최대 63%, 최소 39%