1. 다음 중 옳은 것은?

① $n(\{4\})=4$

② $n(\{0\})=0$

③ $n(\{\varnothing\})=0$

④ $n(A)=n(B)$ 이면 $A=B$

⑤ $A=\{x \mid x$는 10 이하의 소수$\}$ 이면 $n(A)=4$

해설

$A=\{x \mid x$는 10 이하의 소수$\}$
$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 이다.
따라서 $n(A)=4$ 이다.

2. $A = \{ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \}$ 에서 $a_1 \in X$, $a_2 \in X$, $a_5 \notin X$ 를 만족시키는 A 의 부분집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 8 개

해설

a_1, a_2 는 속해있고 a_5 는 속해있지 않은 A 의 부분집합은 $\{a_3, a_4, a_6\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로 $2^{6-2-1} = 2^3 = 8$ (개)

3. 다음은 수진, 영우, 희망이가 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B \subset A$ 일 때, 두 집합사이의 관계를 표현한 것이다. 바르게 표현한 사람은 누구인지 말하여라.

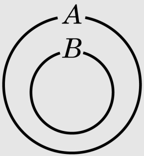
수진 : $A - B = \varnothing$ 영우 : $A \cap B = A$ 희망 : $B - A = \varnothing$

▶ 답 :

▷ 정답 : 희망

해설

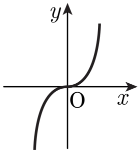
$B \subset A$ 이면 집합 A, B 는 다음 벤 다이어그램과 같은 포함관계를 만족한다.



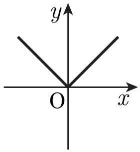
따라서 $B - A = \varnothing$, $A \cap B = B$ 이다.

4. 다음 중 함수의 그래프가 <u>아닌</u> 것은?

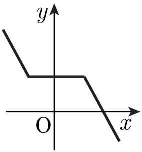
①



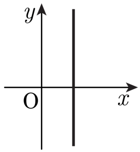
②



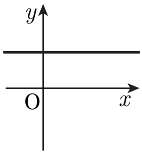
③



④



⑤



해설

함수가 되기 위한 2가지 조건

(i) 정의역에 있는 모든 원소가 빠짐없이 공역에 있는 원소에 대응되어야 한다.

(ii) 정의역에 있는 각각의 원소가 공역의 오직 하나의 원소에 대응되어야 한다.

④ : x 의 한 값 x_1 에 y 의 값이 무수히 많이 대응되고 있으므로 함수가 될 수 없다.

5. 다음 중 '모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.'의 부정인 명제를 고르면?

① 평화시에 살고 있지 않으면 평화고등학교 학생이 아니다.

② 평화시에 사는 학생은 평화고등학교 학생이다.

③ 모든 평화고등하교 학생들은 평화시에 살고 있지 않다.

④ 평화시에 살고 있지 않은 평화고등학교 학생이 적어도 한명은 있다.

⑤ 어떤 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.

해설

모든 ~ 이다. : (부정) ⇒ 어떤 ~ 아니다.
적어도 ~ 아니다.

6. $0 < a < 1$일 때, $P = \frac{1}{a}$, $Q = \frac{1}{2-a}$, $R = \frac{a}{2+a}$의 대소 관계로 옳은 것은?

① $P < R < Q$ ② $R < Q < P$ ③ $Q < P < R$

④ $Q < R < P$ ⑤ $R < P < Q$

해설

i) $\frac{1}{a} - \frac{1}{2-a} = \frac{2-a-a}{a(2-a)} = \frac{2(1-a)}{a(2-a)}$

이 때 $a > 0,\ 2-a > 0,\ 1-a > 0$ 이므로

$\frac{2(1-a)}{a(2-a)} > 0 \qquad \therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{2-a}$

즉, P>Q

ii) $\frac{1}{a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a^2}{a(2+a)} = \frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)}$

이 때 $a > 0,\ 2+a > 0,\ a-2 < 0, a+1 > 0$ 이므로

$\frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)} > 0 \qquad \therefore \frac{1}{a} > \frac{a}{2+a}$

즉, P>R

iii) $\frac{1}{2-a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a(2-a)}{(2-a)(2+a)}$

$= \frac{2+a-2a+a^2}{(2-a)(2+a)} = \frac{a^2-a+2}{(2-a)(2+a)}$

이 때 $2-a > 0, 2+a > 0, a^2-a+2 > 0$이므로 $\frac{1}{2-a} > \frac{a}{2+a}$

$\therefore Q > R$ 따라서, $P > Q > R$이다.

7. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 $|a|+|b| \geq 0$, $|a+b| \geq 0$ 임을 증명하는 과정이다. [가]~[라] 에 알맞은 것을 바르게 나타낸 것은?

> $|a|+|b| \geq 0, ||a+b| \geq 0$ 이므로 $(|a|+|b|)^2$, $|a+b|^2$ 의 대소를 비교하면 된다.
>
> $(|a|+|b|)^2 - \ |a+b|^2$
>
> $= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
>
> $= a^2 + \boxed{가} + b^2 - (a^2 + \boxed{나} + b^2)$
>
> $= 2(\boxed{다}) \geq 0$
>
> (단, 등호는 $\boxed{라} \geq 0$일때성립)

① 가 : $|ab|$, 나 : ab, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : ab

② 가 : $|ab|$, 나 : ab, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : $2ab$

③ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $|ab| - ab$, 라 : ab

④ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : ab

⑤ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : $2ab$

해설

$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$

$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$

$= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$

$= 2(|ab| - ab) \geq 0$

(단, 등호는 $ab \geq 0$일때성립)

8. $X = \{x \mid -2 \le x \le 2\}$, $Y = \{y \mid -3 \le y \le 3\}$ 에서 $f : X \to Y$, $f(x) = ax + b$ (단, $a > 0$) 로 정의되는 함수 f 가 일대일 대응이 되도록 a, b 의 값을 정하면?

① $a = \frac{3}{2}$, $b = 0$ ② $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ ③ $a = \frac{3}{2}$, $b = 1$
④ $a = \frac{5}{2}$, $b = 0$ ⑤ $a = 2$, $b = 0$

해설

f 가 일대일 대응이고 $a > 0$ 이므로

$$\begin{cases} f(-2) = -2a + b = -3 \\ f(2) = 2a + b = 3 \end{cases}$$

$$\therefore\ a = \frac{3}{2},\ b = 0$$

9. $x : y = 4 : 3$일 때, $\dfrac{x^2 + xy}{x^2 - y^2}$의 값은?

① -3　② -1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$x : y = 4 : 3$

$3x = 4y$

$\therefore \quad x = \dfrac{4}{3}y$

$$\frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2} = \frac{\frac{16}{9}y^2 + \frac{4}{3}y^2}{\frac{16}{9}y^2 - y^2} = \frac{28}{7} = 4$$

해설

$x : y = 4 : 3 \Rightarrow x = 4k, y = 3k$

$$\frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2} = \frac{16k^2 + 12k^2}{16k^2 - 9k^2} = \frac{28k^2}{7k^2} = 4$$

10. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 일 때, 다음 식의 값은?

$$\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

① $3(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ ② $3(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ ③ 9

④ $5(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ ⑤ $7(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

해설

$$(\text{주어진 식}) = \frac{\frac{x^3 + y^3}{(xy)^3}}{\frac{x+y}{xy}}$$

$$= \frac{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}{(x+y)(xy)^2}$$

$$= \frac{(x+y)^2 - 3xy}{(xy)^2}$$

조건에서 $x + y = 2\sqrt{3},\ xy = 1$

$$\therefore\ (\text{주어진 식}) = \frac{(2\sqrt{3})^2 - 3 \cdot 1^2}{1} = 9$$

11. 함수 $y = \sqrt{-4x+12}-2$ 는 함수 $y = a\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이다. $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y = \sqrt{-4(x-3)}-2 = 2\sqrt{-(x-3)}-2$ 이고

$y = 2\sqrt{-x} \xrightarrow[y\text{축 } -2]{x\text{축 } 3} y = 2\sqrt{-(x-3)}-2$ 이므로

$a = 2, b = 3, c = -2$

$\therefore\ a+b+c = 2+3-2 = 3$

12. 다음 중 세 수 3^{30}, 4^{20}, 12^{15} 의 대소 관계를 알맞게 나타낸 것은?

① $3^{30} > 4^{20} > 12^{15}$

② $4^{20} > 3^{30} > 12^{15}$

③ $12^{15} > 4^{20} > 3^{30}$

④ $3^{30} > 12^{15} > 4^{20}$

⑤ $12^{15} > 3^{30} > 4^{20}$

해설

$$\left(\frac{3^{1.5}}{4}\right)^{20} = \left(\frac{3\times 1.7}{4}\right)^{20} > 1(3^{1.5} = 3\sqrt{3} \fallingdotseq 3\times 1.7)$$

따라서 3^{30} 이 4^{20} 보다 크다.

$$\left(\frac{3^{2}}{12}\right)^{15} = \left(\frac{3}{4}\right)^{15} < 1 \text{ 이 결과에서}$$

12^{15} 이 3^{30} 보다 크다는 것을 알 수 있다.

13. 다음 그래프 중 평행이동에 의하여 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은?

① $y = \frac{x+1}{x-1}$　　② $y = \frac{x}{x-1}$　　③ $y = \frac{x-2}{x-1}$

④ $y = \frac{-x}{x-1}$　　⑤ $y = \frac{x+3}{x+1}$

해설

$y = \frac{1}{x}$ 과 겹쳐지는 함수는 $y = \frac{1}{x-a} + b$ 의 꼴로 된 것이다.

$\therefore$ ② $y = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$

14. 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$이 성립할 때, $\sqrt{(a-b)^2} - \sqrt{b^2} + |2a|$를 간단히 하면?

① $-2a$ ② $a-2b$ ③ $-2a+2b$

④ $2a-2b$ ⑤ $3a$

해설

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$이면 $a \geq 0,\ b < 0$

$\sqrt{(a-b)^2} - \sqrt{b^2} + |2a| = |a-b| - |b| + |2a|$

$= a - b + b + 2a = 3a$

15. $\sqrt{4+\sqrt{12}}$의 정수 부분을 x, 소수 부분을 y라 할 때, $(x+2y)^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$\sqrt{4+\sqrt{12}} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3}+1 = 2.\times\times\cdots$

$\therefore x = 2,\ y = (\sqrt{3}+1)-2 = \sqrt{3}-1$

$(x+2y)^2 = \{2+2(\sqrt{3}-1)\}^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$

16. 함수 $y = -\sqrt{x+1}+3$의 그래프에 대한 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면?

① 정의역은 $\{x \mid x \geq -1\}$이다.

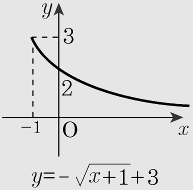
② 치역은 $\{y \mid y \geq 3\}$이다.

③ 그래프는 점 $(-1,\ 3)$ 을 지난다.

④ 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.

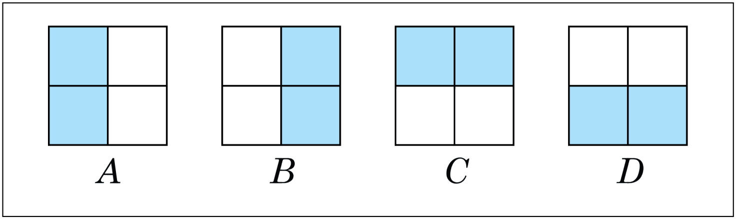
⑤ 그래프는 제 2사분면을 지난다.

해설

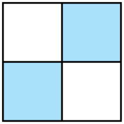


② 치역은 $\{y \mid y \leq 3\}$이다.
④ 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.
⑤ 그래프는 제 1 , 2 , 4 사분면을 지난다.
따라서 옳지 않은 것은 ②, ④이다.

17. 다음 그림은 각각의 집합을 도형으로 나타낸 것이다.



다음 그림을 위의 집합 A, B, C, D 와 연산 기호를 사용하여 옳게 나타낸 것은?



① $(A-B)\cup(B-A)$

② $(A\cup B)-(B\cap C)$

③ $(B-C)\cup(C-B)$

④ $(A\cup C)-(A\cap C)$

⑤ $(B-C)\cup(C-B)$

해설

주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분은 ④ $(A\cup C)-(A\cap C)$ 이다.

18. 전체집합 $U = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$ 의 두 부분집합 $A = \{7,\ 19\}$, $B = \{3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 모두 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

$A \cup X = X,\ \ X \cap (B - A) = \{5,\ 11\}$

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$A \cup X = X$ 이므로 $A \subset X$

$\therefore 7,\ 19$ 는 X 의 원소

$B - A = \{3, 5, 11, 13\}$ 이고

$X \cap (B - A) = \{5, 11\}$ 이므로

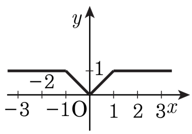
5, 11 은 X 의 원소이고 3, 13 은 X 의 원소가 아니다.

따라서 X 는 5, 7, 11, 9 를 포함하고 3, 13 은 포함하지 않는 전체집합 U 의 부분집합이므로

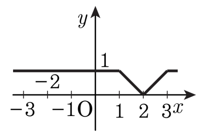
$2^{8-4-2} = 2^2 = 4$(개)

19. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 가 각각 $f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$, $g(x) = x - 2$ 일 때, 합성함수 $f \circ g$의 그래프는?

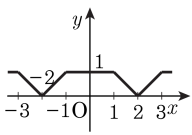
①



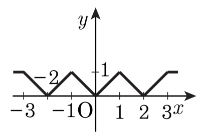
②



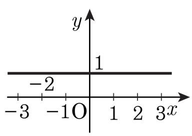
③



④



⑤



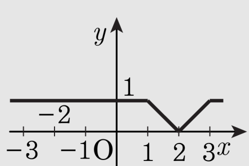
해설

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$$

$g(x) = x - 2$ 에서

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & (|x-2| \geq 1) \\ |x-2| & (|x-2| < 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 & (x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ |x-2| & (1 < x < 3) \end{cases}$$



20. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{99\cdot 100}=\dfrac{a}{100}$, $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{99\cdot 101}=\dfrac{b}{101}$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 149

해설

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=1-\frac{1}{100}$$

$$=\frac{99}{100}=\frac{a}{100}$$

$\therefore\ a=99$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 101}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{97}-\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{101}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{100}{101}=\frac{50}{101}=\frac{b}{101}$$

$\therefore\ b=50$

$\therefore\ a+b=149$