1. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(5,0)$, $\mathrm{B}(-3,3)$ 과 원점으로부터 거리가 2 만큼 떨어진 동점 P 에 대하여 $\triangle\mathrm{ABP}$ 의 무게중심이 그리는 자취의 길이는?

① $\frac{\pi}{3}$　② $\frac{2}{3}\pi$　③ π　④ $\frac{4}{3}\pi$　⑤ $\frac{5}{3}\pi$

해설

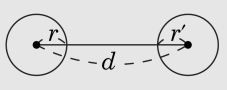
원점으로부터 거리가 2 만큼 떨어진
동점 P 의 좌표를 (a,b) 라 하면
$a^2+b^2=4 \cdots\cdots$ ㉠
또, $\triangle\mathrm{ABP}$ 의 무게중심을 $\mathrm{G}(x,y)$ 라 하면
$x=\frac{a+5-3}{3},\ y=\frac{b+0+3}{3}$
$\therefore a=3x-2,\ b=3y-3$
이것을 ㉠에 대입하면
$(3x-2)^2+(3y-3)^2=4$
$\therefore \left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y-1)^2=\frac{4}{9}$
따라서, 무게중심 $\mathrm{G}(x,y)$ 의 자취의 길이는
반지름의 길이가 $\frac{2}{3}$ 인 원의 둘레의 길이와
같으므로 $\frac{4}{3}\pi$ 이다.

2. 두 원 $\mathrm{C}_1 : x^2 + y^2 = r^2$, $\mathrm{C}_2 : (x-6)^2 + (y-8)^2 = 4$에 대하여 공통 접선의 개수가 4 개가 되도록 하는 양의 정수 r 의 개수는?

① 4 개　② 5 개　③ 6 개　④ 7 개　⑤ 8 개

해설

공통접선이 4 개인 경우 $r + r' < d$인 경우



$\mathrm{C}_1 \;\Rightarrow\; (0,\ 0)\ r = r'$

$\mathrm{C}_2 \;\Rightarrow\; (6,\ 8)\ r = 2$

중심거리 $(d) = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$\therefore\ \ r + 2 < 10$

$\quad r < 8$ (단, $r > 0$)

r의 갯수는 $r = 1,\ 2,\ 3 \cdots 7$이므로 7 개이다.

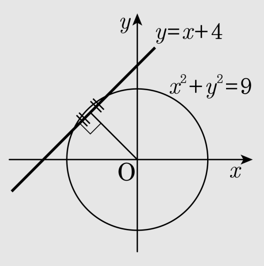
3. 직선 $y = x+4$가 원 $x^2+y^2 = 9$에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x - y + 4 = 0$ 이므로 $\frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을
수직이등분하므로 피타고라스 정리에서 ,
현의 길이는 $2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2$

4. 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=10$ 위의 점 $(-3,\ 4)$ 에서의 접선의 방정식이 $y=mx+n$ 일 때, $3m+n$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(-3,\ 4)$ 을 지나는 방정식 : $y=m(x+3)+4$
원에 접하므로 원 중심에서 직선까지 거리는 반지름과 같다.

$\Rightarrow\ \dfrac{|m\times(-2)-1\times1+3m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$

$\Rightarrow\ (m+3)^2=10m^2+10$

$\Rightarrow\ (3m-1)^2=0,\ m=\dfrac{1}{3}$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{3}x+5\ \ \Rightarrow\ \ 3m+n=6$

5. 직선 $y = 2x$ 에 평행하고 원 $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$ 에 접하는 접선의 방정식을 구하면?

① $y = x + 1$ 또는 $y = 2x - 11$

② $y = 2x + 2$ 또는 $y = 4x - 4$

③ $y = 2x + 5$ 또는 $y = 2x - 15$

④ $y = 3x + 6$ 또는 $y = 7x - 19$

⑤ $y = 6x + 3$ 또는 $y = 3x - 5$

해설

구하는 접선이 직선 $y = 2x$ 에 평행하므로
$y = 2x + b \cdots\cdots$ ㉠ 로 놓을 수 있다.
이 때, $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$ 에서
$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 20$ 이므로
중심이 $(1, -3)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{20}$ 인 원이다.
따라서, 원의 중심 $(1, -3)$ 에서 직선 $y = 2x + b$,
즉 $2x - y + b = 0$ 까지의 거리가 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|2+3+b|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{20}$$

$|b+5| = 10, b + 5 = \pm 10$
$\therefore b = 5$ 또는 $b = -15$
이것을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
$y = 2x + 5$ 또는 $y = 2x - 15$

해설

㉠을 원의 방정식에 대입하면
$x^2 + (2x+b)^2 - 2x + 6(2x+b) - 10 = 0$
$5x^2 + 2(5+2b)x + b^2 + 6b - 10 = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (5+2b)^2 - 5\left(b^2 + 6b - 10\right) = 0$$

$b^2 + 10b - 75 = 0, (b-5)(b+15) = 0$
$\therefore b = 5$ 또는 $b = -15$ 이것을 ㉠에 대입하면
구하는 접선의 방정식은
$y = 2x + 5$ 또는 $y = 2x - 15$

6. 점 $(3,\ 1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선을 $y=mx+n$이라 할 때, mn의 값은?

① -4　　② -6　　③ -8　　④ -10　　⑤ -12

해설

점 $(3,\ 1)$을 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면, $y=m(x-3)+1$
이 직선은 원에 접하므로 원의 중심과의 거리가 반지름과 같다.

$\dfrac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$에서

$2m^2-3m-2=0$

$m=-\dfrac{1}{2},\ 2$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y=2x-5$ $(\because m>0)$

$\therefore\ mn=-10$

7. 평행이동 $(x,\ y) \to (x+a,\ y+b)$ 에 의하여 점 $(2,\ 1)$이 점 $(1,\ -1)$로 옮겨질 때, $(0,\ 0)$는 어느 점으로 옮겨지는가?

① $(1,\ 2)$　② $(-1,\ 2)$　③ $(1,\ -2)$

④ $(-1,\ -2)$　⑤ $(2,\ 1)$

해설

점 $(2,\ 1)$이 점 $(1,\ -1)$로 옮겨지면, x축 방향으로 -1, y축 방향으로 -2만큼 평행이동 하므로 $(0-1,\ 0-2)=(-1,\ -2)$로 이동한다.

8. 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ 을 x 축 방향으로 2 , y 축 방향으로 5 만큼 평행이동 했을 때, 이 원의 중심의 좌표를 (a,b) 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=6$

해설

원의 중심 $(1,-2)$ 를 x 축으로 2, y 축으로 5 평행 이동시키면, $(1,-2) \rightarrow \quad (3,3)$

$\therefore a=3, b=3, a+b=6$

9. 평행이동 $f:(x,\ y) \to (x+a,\ y+4)$ 에 의해 원 $x^2+y^2=1$ 을 이동하였더니 원점에서 원의 중심까지의 거리가 5 가 되었다. 이 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

평행이동 $f:(x,\ y) \to (x+a,\ y+4)$ 는
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로
4 만큼 평행이동하는 것이므로
원 $x^2+y^2=1$ 을 평행이동하면 원의 중심
$(0,\ 0)$ 은 $(a,\ 4)$ 로 옮겨진다.
이 때, 두 점 $(0,\ 0)$ 과 $(a,\ 4)$ 의 거리가 5 이므로
$\sqrt{a^2+4^2}=5$
위의 식의 양변을 제곱하면
$a^2+16=25,\ a^2=9$
그런데 $a>0$ 이므로 $a=3$

10. 직선 $ax+by+c=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동 하였더니 직선 $3x-4y+2=0$ 과 수직이 되었다. 이 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $\frac{8a}{3b}$ 의 값은?(단, $ab \neq 0$)

① $-\frac{32}{9}$ ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ $\frac{32}{9}$

해설

$y=x$ 대칭시키면 직선은

$bx+ay+c=0 \Rightarrow \quad y=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$,

$y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$ 과 수직이 되려면,

$\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$ 가 되어야 한다.

$\therefore \quad \frac{8a}{3b}=\frac{8}{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)=2$

11. 점 $(a-4, a-2)$ 를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 다음, $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점과 원점 사이의 거리가 2일 때, 처음 점의 좌표를 (p, q) 라 한다. p^2+q^2 의 값을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$(a-4, a-2) \rightarrow (a, a-2)$
(x 축으로 4만큼 평행이동)
$(a, a-2) \rightarrow (a-2, a)$
($y=x$ 에 대칭이동)
$(a-2, a)$ 와 원점 사이의 거리는
$\sqrt{(a-2)^2+a^2}=2$
$2a^2-4a+4=4$,
$\therefore a=2 \quad (\because a \neq 0)$
처음 점의 좌표 $(a-4, a-2)$ 에 $a=2$ 를 대입하면
구하는 점의 좌표 $(p,\ q)=(-2,\ 0)$
$\therefore p^2+q^2=4$

12. 점 $(1,\ 2)$ 를 직선 $y=2x+1$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$ 라고 할 때, 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $5(a+b)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

두 점 $(1,\ 2)$, $(a,\ b)$ 를 이은 선분의 중점은

$\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{2+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=2x+1$ 위의 점이므로

$\frac{2+b}{2}=2\cdot\frac{1+a}{2}+1$

$\therefore 2a-b=-2$ ⋯⋯⋯ ㉠

또한, 두 점 $(1,\ 2)$, $(a,\ b)$ 를 지나는 직선이

직선 $y=2x+1$ 과 수직이므로

$\frac{b-2}{a-1}=-\frac{1}{2}$

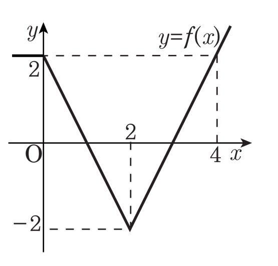
$\therefore\ a+2b=5$ ⋯⋯⋯ ㉡

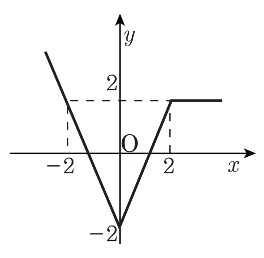
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

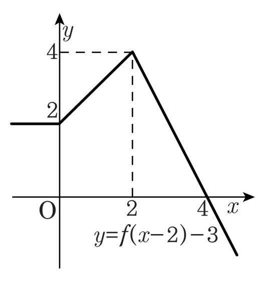
$a=\frac{1}{5},\ b=\frac{12}{5}$

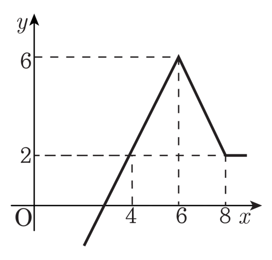
따라서, $5(a+b)=5\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{12}{5}\right)=5\cdot\frac{13}{5}=13$

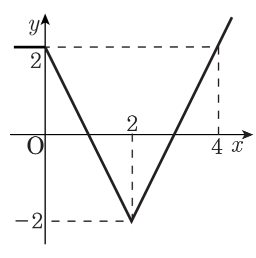
13. 방정식 $y = f(x)$ 가 나타내는 도형이 그림과 같을 때, $y = f(2-x)$ 가 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?

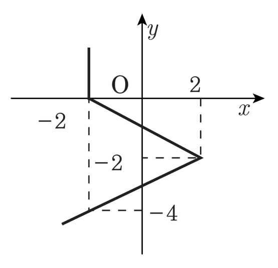


①


②


③


④


⑤


해설

$y = f(2-x) \Leftrightarrow y = f(2 \cdot 1 - x)$
따라서 $y = f(x)$ 의 그래프를 직선 $x = 1$ 에 대하여 대칭이동한 것이다.
그러므로 구하는 도형을 좌표평면 위에 나타내면 ①과 같다.

14. 다음 중 원 $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=\frac{1}{3}$
② $x^2+y^2=1$
③ $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$
④ $x^2+y^2=4$
⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{2}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 에서 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 2인 ④이다.

15. 두 집합 $A = \left\{a, \boxed{}, b, d\right\}$, $B = \left\{b, c, \boxed{}, d\right\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 일 때, $\boxed{}$ 안에 들어갈 알파벳을 차례대로 써넣어라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : c

▷ 정답 : a

해설

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 는 $A = B$ 이다. 집합 A, B 의 모든 원소가 같아야 하므로 두 집합을 비교하면 집합 A 의 $\boxed{} = c$ 이고, 집합 B 의 $\boxed{} = a$ 이다.

16. 집합 $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ 의 부분집합 중에서 n 을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수가 32 개일 때, 자연수 n 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$2^{(n\text{을 제외한 원소의 개수})} = 2^{n-1} = 32 = 2^5 \quad \therefore n = 6$

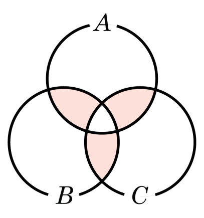
17. 두 집합 A, B에 대하여 $A = \{20, 32, 36\}$, $A \cup B = \{x \mid x$는 4의 배수, $20 \le x \le 40\}$일 때, 집합 B로 가능한 것은?

① $\{32, 36, 40\}$　② $\{24, 28, 36, 40\}$　③ $\{24, 32, 36, 40\}$
④ $\{24, 26, 30, 34\}$　⑤ $\{32, 36, 38, 40\}$

해설

$A = \{20, 32, 36\}$, $A \cup B = \{20, 24, 28, 32, 36, 40\}$이므로
$\{24, 28, 40\} \subset B \subset \{20, 24, 28, 32, 36, 40\}$

18. 두 집합 X, Y에 대하여 $X \bigstar Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$라고 정의할 때, 다음의 벤다이어그램에서 빗금 친 부분을 나타내는 것은?



① $\{(A \cap B) \cup (A \cap C)\} \bigstar (B \cap C)$

② $\{(A \cup B) \cap (A \cup C)\} \bigstar (B \cap C)$

③ $\{(A \cap B) \bigstar (A \cap C)\} \cup (B \cap C)$

④ $\{(A \cup B) \bigstar (A \cup C)\} \cup (B \cap C)$

⑤ $\{(A \cap B) \bigstar (A \cap C)\} \cup (B \cap C)$

해설

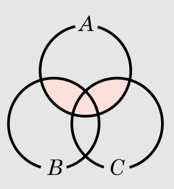
$(A \cap B) \cup (A \cap C) = p$, $B \cap C = q$,

$\therefore X \bigstar Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$

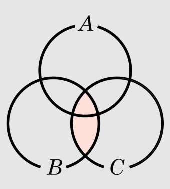
$= (X \cup Y) - (Z \cap Y)$

$\{(A \cap B) \cup (A \cap C)\} \bigstar (B \cap C)$

$\Rightarrow p \bigstar q = (p - q) \cup (q - p)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C) = p$



$B \cap C = q$

19. 전체집합 U에 대하여 두 조건 $p,\ q$ 를 만족하는 집합을 각각 $P,\ Q$ 라 할 때, $P \cup (Q - P) = Q$ 이다. 다음 명제 중 반드시 참인 것은?

① $\sim p \rightarrow q$ ② $q \rightarrow p$ ③ $q \rightarrow \sim p$

④ $\sim q \rightarrow \sim p$ ⑤ $\sim p \rightarrow \sim q$

해설

$P \cup (Q - P) = P \cup (Q \cap P^C)$ (차집합의 성질)
$= (P \cup Q) \cap (P \cup P^c)$ (분배법칙)
$= (P \cup Q) \cap U$
$= P \cup Q = Q$ 이므로 $P \subset Q$
$P \subset Q$ 이면 $Q^c \subset P^c$ 이므로 $\sim q \rightarrow \sim p$ 가 참

해설

$P \subset Q$ 이면 $p \rightarrow q$ 가 참이고 그 대우인 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

20. 다음 중 거짓인 명제는?

① 모든 소수는 약수를 2개 가진다.
② 어떤 소수는 홀수가 아니다.
③ 모든 실수 a 에 대하여 $a^2 > 0$ 이다.
④ a, b 가 유리수이면 $a + b$ 도 유리수이다.
⑤ 중산고등학교 1 학년 학생들은 수학 공부를 열심히 한다.

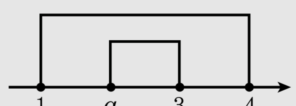
해설
③ 0도 실수에 포함되므로 거짓이다.

21. $a \le x \le 3$ 은 $1 \le x \le 4$ 이기 위한 충분조건이고, $1 \le x \le 4$ 이기 위한 필요조건은 $0 \le x \le b$ 이다. 이때, a 의 최솟값과 b 의 최솟값의 곱은?

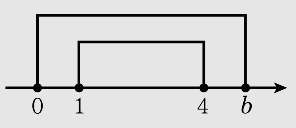
① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

(i) $0 \le x \le 3$ 은 $1 \le x \le 4$ 이기 위한 충분조건이므로 다음 그림에서 $1 \le a \le 3$
따라서, a 의 최솟값은 1이다.



(ii) $1 \le x \le 4$ 이기 위한 필요조건이 $0 \le x \le b$ 이므로 다음 그림에서 $b \ge 4$



따라서, b 의 최솟값은 4이다.
(i), (ii) 에서 a 의 최솟값과 b 의 최솟값의 곱은 $1 \times 4 = 4$

22. 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건, r 은 q 이기 위한 필요조건, r 은 s 이기 위한 충분조건, q 는 s 이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① q는 p 이기 위한 충분조건이다.

② r은 p 이기 위한 충분조건이다.

③ p는 r이기 위한 필요충분조건이다.

④ r 은 s 이기 위한 필요충분조건이다.

⑤ s 는 p이기 위한 필요충분조건이다.

해설

주어진 조건을 그림처럼 도식화 해보면 q, r, s는 서로 필요충분조건이고 p는 q, r, s이기 위한 충분조건이다.

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, Rightarrow] & q \arrow[r, Rightarrow] & r \arrow[dl, Rightarrow] \\ & s \arrow[u, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

$\therefore$ ④

23. 실수 x, y가 $x^2+y^2=5$를 만족할 때, $x+2y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (x+2y)^2$

$x^2+y^2=5$이므로

$25 \geq (x+2y)^2$

$\therefore\ -5 \leq x+2y \leq 5$

$\therefore\ M=5,\ m=-5$

$\therefore\ M-m=5-(-5)=10$

24. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$

$x^2+y^2=10$이므로 $100 \geq (x+3y)^2$

$\therefore\ -10 \leq x+3y \leq 10$

$\therefore\ M=10,\ m=-10$

$\therefore\ M-m=10-(-10)=20$

25. 두 정점 $A(-1,\ 0)$, $B(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $1\ :\ 2$ 인 점 P 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은 3 이다.
㉡ $\angle PBA$ 의 최대 크기는 $60°$ 이다.
㉢ 점 P 의 자취의 길이는 4π 이다.

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

두 정점 $A(-1,\ 0)$, $B(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $1\ :\ 2$ 인 점 P 의 자취는 $(0, 0)$ 과 $(-4, 0)$ 을 지름의 양 끝으로 하는 원이다. 따라서 이 원은 $(x+2)^2+y^2=4$ 로 나타낼 수 있다.
삼각형 밑변의 길이가 정해져있으므로 높이가 최대일 때 삼각형의 넓이도 최대가 된다.
따라서 원의 반지름인 2 가 높이일 때의 넓이인 3 이 최댓값이다.
$\angle PBA$ 의 최대 크기는 점 P 가 원에 접할 때이므로 $\sin(\angle PBA)=\dfrac{2}{2-(-2)}=\dfrac{1}{2}$ 에서
$\angle PBA = 30°$
점 P 의 자취의 방정식은 $(x+2)^2+y^2=4$ 이므로 둘레의 길이는 4π 이다

26. 두 원 $x^2+y^2=9$, $(x-4)^2+y^2=1$ 에 동시에 외접하고 반지름의 길이가 2 인 원의 중심의 좌표를 구하면?

① (3, 3) ② (3, −3) ③ (4, ±4)

④ (±4, 4) ⑤ (4, ±3)

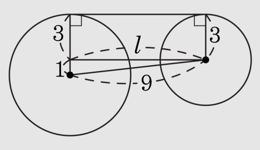
해설

두 원이 외접하면 중심사이 거리는 반지름 길이 합과 같다.
중심의 좌표를 (a, b) 라 하면,
⇒ i) $a^2+b^2=25$
ii) $(a-4)^2+b^2=9$ 연립하면,
$a=4,\ \ b=\pm 3$
∴ 중심은 $(4, \pm 3)$

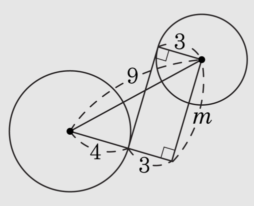
27. 두 원 $x^2 + y^2 = 16$, $(x-9)^2 + y^2 = 9$ 의 공통외접선의 길이를 l 이라 하고 공통내접선의 길이를 m 이라 할 때, $l^2 - m^2$ 의 값은?

① 48　　② -48　　③ 32　　④ -32　　⑤ 30

해설



중심이 (0, 0) (9, 0) 이므로
중심간의 거리는 9이다.
$\therefore\ l^2 = 9^2 - 1^2$



$\therefore\ m^2 = 9^2 - 7^2$

$\therefore\ l^2 - m^2 = (9^2 - 1^2) - (9^2 - 7^2)$

$= -1^2 + 7^2 = 48$

28. 원 $x^2 + y^2 = 1$과 직선$ax + by + c = 0$에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 모두 양수이고 $b \ge a$)

보기

ㄱ $c = b$이면 두 점에서 만난다.

ㄴ $c = 2b$이면 만나지 않는다.

ㄷ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$이면 한 점에서 만난다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

원의 중심이 $(0,\ 0)$이므로 원의 중심에서 직선 $ax + by + c = 0$ 에 이르는 거리를 d라 하면

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ㄱ $d = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} < 1$ 그러므로 교점은 2개다.

즉, $n(A \cap B) = 2$

ㄴ $d = \frac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ge \frac{2b}{\sqrt{2}b} > 1$ ($\because\ b \ge a$)

그러므로 교점은 없다.

ㄷ $d = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$

그러므로 교점은 1 개다.

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

29. 두 점 A$(-3,\ 0)$, B$(1,\ 0)$으로 부터의 거리의 비가 $3\ :\ 1$인 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은?

① 2　　② $\frac{5}{2}$　　③ 3　　④ $\frac{7}{2}$　　⑤ 4

해설

주어진 조건에서 $\overline{\mathrm{AP}}\ :\ \overline{\mathrm{BP}} = 3\ :\ 1$이므로

$\overline{\mathrm{AP}} = 3\overline{\mathrm{BP}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}^2 = 9\overline{\mathrm{BP}}^2$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 놓으면

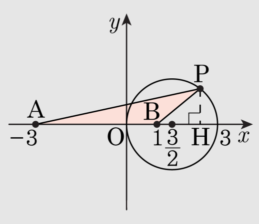
$(x+3)^2 + y^2 = 9\left(x-1)^2 + y^2\right\}$

$x^2 + y^2 - 3x = 0 \ \therefore \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$

따라서 점 P는 중심이 좌표가 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$이고

반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$인 원 위를 움직인다.

그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을
H라 하면



$\triangle\mathrm{PAB} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{PH}}$

이 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 4$이고 $\overline{\mathrm{PH}}$
의 길이의 최댓값은 반지름의 길이
$\frac{3}{2}$이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{3}{2} = 3$

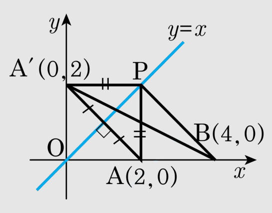
30. x 축 위의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0), \mathrm{B}(4, 0)$ 과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은?

① 2　　② $2\sqrt{2}$　　③ $2\sqrt{3}$　　④ 4　　⑤ $2\sqrt{5}$

해설

점 $\mathrm{A}(2, 0)$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A′ 이라 하면 $\mathrm{A}'(0,\ 2)$

이때, 다음 그림에서



$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{A'P}}$

또, $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{A'P}} + \overline{\mathrm{BP}} \geq \overline{\mathrm{A'B}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은

$\overline{\mathrm{A'B}} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

31. 집합 $A = \{(a,\ b)\ |\ a \times b = 9,\ a,\ b$는 자연수$\}$ 일 때, 집합 $n(A)$ 를 바르게 구한 것은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$1 \times 9 = 3 \times 3 = 9 \times 1 = 9$ 이므로 원소나열법으로 나타내면
$A = \{(1,\ 9),\ (3,\ 3),\ (9,\ 1)\}$ 이다.
$\therefore\ n(A) = 3$

32. 집합 $A=\{0,\ 2,\ \{4\},\ \{6,\ 8\},\ \varnothing\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?.

① $\varnothing \in A$

② $\{0,\ 2,\ \{4\}\} \subset A$

③ $n(A)=5$

④ $\{4\} \subset A$

⑤ $\{6,\ 8\} \in A$

해설

④ $\{4\} \in A$

33. 세 집합 $A = \{x \mid x\text{는 } 8\text{의 약수}\}$, $B = \{x \mid x\text{는 } \boxed{}\text{의 약수}\}$, $C = \{x \mid x\text{는 } 64\text{의 약수}\}$ 에 대하여 $A \subset B \subset C$ 가 동시에 성립하기 위한 $\boxed{}$ 의 값을 모두 구하면?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

해설

$A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $C = \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64\}$ 집합 A를 포함하면서 집합 C 에 포함되는 집합이 되려면 $\boxed{}$ 는 64 의 약수 중 8 의 배수여야 한다. 따라서 $\boxed{} = 8, 16, 32, 64$

34. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이고, 다음 조건을 만족하는 집합 B 의 갯수를 구하여라.

$B \subset A$ $2 \in B$ $n(B) = 3$

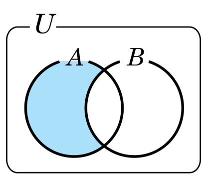
▶ 답 : 개

▷ 정답 : 6 개

해설

집합 B 는 원소 2 를 반드시 포함하고 원소의 갯수가 3 개인 집합 A 의 부분집합이다. 따라서 만족하는 집합 B 를 구하면 $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$ 이고, 총 6 개이다.

35. 다음 중 다음 벤 다이어그램의 색칠된 부분이 나타내는 집합에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르면 ?



① $A-B$ 라고 쓰며, A 마이너스 B 라고 읽는다.

② A 에도 속하고 B 에도 속하는 원소들로 이루어진 집합이다.

③ $A-B=\{x|x\in A$ 그리고 $x\notin B\}$

④ $A-B=B-A$

⑤ $A-B=A\cap B^c$

해설

① $A-B$ 라고 쓰며, A 차집합 B 라고 읽는다.
② A 에는 속하지만 B 에도 속하지 않는 원소들로 이루어진 집합이다
④ $A-B\neq B-A$

36. 자연수 전체의 집합의 부분집합 $A = \{a|a\text{는 } 24\text{의 약수}\}$, $B = \{b|b\text{는 } 36\text{의 약수}\}$ 에 대하여 $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$ 의 모든 원소의 총합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 95

해설

$A = \{a|a \text{ 는 } 24 \text{ 의 약수}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
$B = \{b|b \text{ 는 } 36 \text{ 의 약수}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

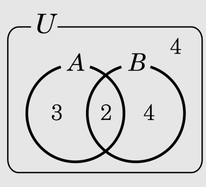
$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= \{8, 9, 18, 24, 36\}\end{aligned}$$

따라서 원소의 총합은 $8 + 9 + 18 + 24 + 36 = 95$

37. 전체집합 $U = \{x|x\text{는 } 41 \text{ 이하의 소수}\}$ 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $n(A^c \cap B) = 4,\ n(B^c) = 7,\ n(A^c \cap B^c) = 4$ 일 때, $n(A - B)$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설



$n(U) = 13$ 이므로

$n(B) = n(U) - n(B^c) = 6$

$A^c \cap B = B - A$ 이므로

$n(B - A) = n(A^c \cap B) = 4$

$n((A \cup B)^c) = n(A^c \cap B^c) = 4$

벤 다이어그램에 각 부분의 원소의 개수를 적어보면 따라서

$n(A - B) = 13 - (6 + 4) = 3$ 이다.

38. 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하자. $\sim q$가 p이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P^c \subset Q$ ② $Q \subset P$ ③ $Q - P = \phi$
④ $P - Q = P$ ⑤ $P - Q = \phi$

해설

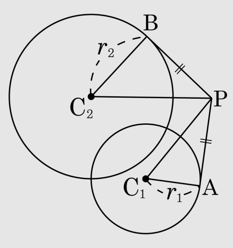
$p \rightarrow \sim q$이므로 진리집합으로 표현하면, $P \subset Q^c$ 이다.
즉, $P \cap Q^c = P \Rightarrow P - Q = P$

39. 한 점 P$(a,\ b)$ 에서 두 원 $(x-4)^2+(y+1)^2=4$ 와 $(x-2)^2+(y-2)^2=9$ 에 그은 각각의 접선과 두 원과의 접점을 A, B 라 할 때, $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$ 인 점 P$(a,\ b)$ 의 자취를 구하면?

① $2a-3b-7=0$
② $2a-3b+7=0$
③ $a^2+b^2=3$
④ $a^2+b^2=4$
⑤ $a^2+b^2=5$

해설

$(x-4)^2+(y+1)^2=4,\ (x-2)^2+(y-2)^2=9$
문제의 조건에서
$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$이므로 $(\overline{\mathrm{PA}})^2=(\overline{\mathrm{PB}})^2$
$\Rightarrow\ (\overline{\mathrm{PC}_1})^2-{r_1}^2=(\overline{\mathrm{PC}_2})^2-{r_2}^2$



원의 중심 $C_1=(4,\ -1),\ C_2=(2,\ 2)$,
반지름 $r_1=2,\ r_2=3$
$\therefore\ (a-4)^2+(b+1)^2-4=(a-2)^2+(b-2)^2-9$
$\therefore$ 위를 정리하면 $2a-3b-7=0$

40. 자연수 n을 적당한 정수 k_i를 써서 $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_z}$ 로 나타낼 때, $A(n) = \{k_1,\ k_2, \cdots,\ k_z\}$으로 정의한다. (단, $0 \leq k_1 < k_2 \cdots < k_z$) 이 때, $A(29)$ 의 원소의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

문제의 요구대로 29 를 2 진법의 전개식으로 나타내면 $29 = 16 + 8 + 4 + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0$ 이다.

$\therefore\ A(29) = \{4,\ 3,\ 2,\ 0\}$

원소의 총합은 $4 + 3 + 2 + 0 = 9$