

1. 좌표평면 위의 두 점  $A(5,0), B(-3,3)$  과 원점으로부터 거리가 2 만큼 떨어진 동점  $P$  에 대하여  $\triangle ABP$  의 무게중심이 그리는 자취의 길이는?

①  $\frac{\pi}{3}$

②  $\frac{2}{3}\pi$

③  $\pi$

④  $\frac{4}{3}\pi$

⑤  $\frac{5}{3}\pi$

### 해설

원점으로부터 거리가 2 만큼 떨어진 동점  $P$  의 좌표를  $(a,b)$  라 하면

$$a^2 + b^2 = 4 \dots\dots \textcircled{1}$$

또,  $\triangle ABP$  의 무게중심을  $G(x,y)$  라 하면

$$x = \frac{a+5-3}{3}, y = \frac{b+0+3}{3}$$

$$\therefore a = 3x - 2, b = 3y - 3$$

이것을  $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$(3x - 2)^2 + (3y - 3)^2 = 4$$

$$\therefore \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{4}{9}$$

따라서, 무게중심  $G(x,y)$  의 자취의 길이는

반지름의 길이가  $\frac{2}{3}$  인 원의 둘레의 길이와

같으므로  $\frac{4}{3}\pi$  이다.

2. 두 원  $C_1 : x^2 + y^2 = r^2$ ,  $C_2 : (x-6)^2 + (y-8)^2 = 4$ 에 대하여 공통 접선의 개수가 4개가 되도록 하는 양의 정수  $r$ 의 개수는?

① 4개

② 5개

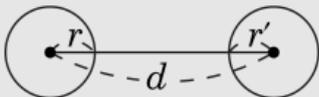
③ 6개

④ 7개

⑤ 8개

해설

공통접선이 4개인 경우  $r + r' < d$ 인 경우



$$C_1 \Rightarrow (0, 0) \quad r = r'$$

$$C_2 \Rightarrow (6, 8) \quad r = 2$$

$$\text{중심거리 } (d) = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$\therefore r + 2 < 10$$

$$r < 8 \quad (\text{단, } r > 0)$$

$r$ 의 갯수는  $r = 1, 2, 3 \dots 7$ 이므로 7개이다.

3. 직선  $y = x + 4$ 가 원  $x^2 + y^2 = 9$ 에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

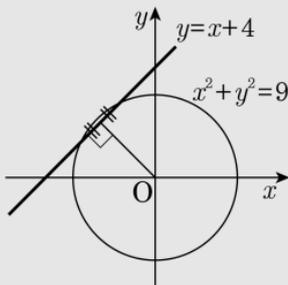
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

### 해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선  $x - y + 4 = 0$

$$\text{이므로 } \frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분하므로 피타고라스 정리에서,

$$\text{현의 길이는 } 2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2$$

4. 원  $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$  위의 점  $(-3, 4)$  에서의 접선의 방정식이  $y = mx + n$  일 때,  $3m + n$  의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 6

### 해설

$(-3, 4)$  을 지나는 방정식 :  $y = m(x+3) + 4$   
원에 접하므로 원 중심에서 직선까지 거리는  
반지름과 같다.

$$\Rightarrow \frac{|m \times (-2) - 1 \times 1 + 3m + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow (m+3)^2 = 10m^2 + 10$$

$$\Rightarrow (3m-1)^2 = 0, m = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{접선의 방정식은 } y = \frac{1}{3}x + 5 \Rightarrow 3m + n = 6$$

5. 직선  $y = 2x$  에 평행하고 원  $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$  에 접하는 접선의 방정식을 구하면?

- ①  $y = x + 1$  또는  $y = 2x - 11$
- ②  $y = 2x + 2$  또는  $y = 4x - 4$
- ③  $y = 2x + 5$  또는  $y = 2x - 15$
- ④  $y = 3x + 6$  또는  $y = 7x - 19$
- ⑤  $y = 6x + 3$  또는  $y = 3x - 5$

**해설**

구하는 접선이 직선  $y = 2x$  에 평행하므로

$y = 2x + b \dots\dots$  ㉠ 로 놓을 수 있다.

이 때,  $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$ 에서

$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 20$  이므로

중심이  $(1, -3)$ , 반지름의 길이가  $\sqrt{20}$  인 원이다.

따라서, 원의 중심  $(1, -3)$  에서 직선  $y = 2x + b$ ,

즉  $2x - y + b = 0$  까지의 거리가 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|2 + 3 + b|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{20}$$

$$|b + 5| = 10, b + 5 = \pm 10$$

$$\therefore b = 5 \text{ 또는 } b = -15$$

이것을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y = 2x + 5 \text{ 또는 } y = 2x - 15$$

**해설**

㉠을 원의 방정식에 대입하면

$$x^2 + (2x + b)^2 - 2x + 6(2x + b) - 10 = 0$$

$$5x^2 + 2(5 + 2b)x + b^2 + 6b - 10 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을  $D$  라고 하면

$$\frac{D}{4} = (5 + 2b)^2 - 5(b^2 + 6b - 10) = 0$$

$$b^2 + 10b - 75 = 0, (b - 5)(b + 15) = 0$$

$$\therefore b = 5 \text{ 또는 } b = -15 \text{ 이것을 ㉠에 대입하면}$$

구하는 접선의 방정식은

$$y = 2x + 5 \text{ 또는 } y = 2x - 15$$

6. 점 (3, 1)에서 원  $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선을  $y = mx + n$  이라 할 때,  $mn$ 의 값은?

① -4

② -6

③ -8

④ -10

⑤ -12

해설

점 (3, 1)을 지나는 접선의 기울기를  $m$ 이라 하면,  $y = m(x-3)+1$  이 직선은 원에 접하므로 원의 중심과의 거리가 반지름과 같다.

$$\frac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5} \text{에서}$$

$$2m^2 - 3m - 2 = 0$$

$$m = -\frac{1}{2}, 2$$

$\therefore$  접선의 방정식은  $y = 2x - 5$  ( $\because m > 0$ )

$$\therefore mn = -10$$

7. 평행이동  $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$  에 의하여 점  $(2, 1)$ 이 점  $(1, -1)$ 로 옮겨질 때,  $(0, 0)$ 는 어느 점으로 옮겨지는가?

①  $(1, 2)$

②  $(-1, 2)$

③  $(1, -2)$

④  $(-1, -2)$

⑤  $(2, 1)$

해설

점  $(2, 1)$ 이 점  $(1, -1)$ 로 옮겨지면,  $x$ 축 방향으로  $-1$ ,  $y$ 축 방향으로  $-2$ 만큼 평행이동 하므로  $(0 - 1, 0 - 2) = (-1, -2)$ 로 이동한다.

8. 원  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$  을  $x$  축 방향으로 2,  $y$  축 방향으로 5 만큼 평행이동 했을 때, 이 원의 중심의 좌표를  $(a,b)$  라 할 때,  $a+b$  의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답:  $a+b=6$

해설

원의 중심  $(1, -2)$  를  $x$  축으로 2,  $y$  축으로 5 평행 이동시키면,  $(1, -2) \rightarrow (3, 3)$   
 $\therefore a=3, b=3, a+b=6$

9. 평행이동  $f : (x, y) \rightarrow (x + a, y + 4)$  에 의해 원  $x^2 + y^2 = 1$  을 이동하였더니 원점에서 원의 중심까지의 거리가 5 가 되었다. 이 때, 양수  $a$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

### 해설

평행이동  $f : (x, y) \rightarrow (x + a, y + 4)$  는  $x$  축의 방향으로  $a$  만큼,  $y$  축의 방향으로 4 만큼 평행이동하는 것이므로

원  $x^2 + y^2 = 1$  을 평행이동하면 원의 중심  $(0, 0)$  은  $(a, 4)$  로 옮겨진다.

이 때, 두 점  $(0, 0)$  과  $(a, 4)$  의 거리가 5 이므로

$$\sqrt{a^2 + 4^2} = 5$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$a^2 + 16 = 25, a^2 = 9$$

그런데  $a > 0$  이므로  $a = 3$

10. 직선  $ax + by + c = 0$  을 직선  $y = x$  에 대하여 대칭이동 하였더니 직선  $3x - 4y + 2 = 0$  과 수직이 되었다. 이 때, 두 상수  $a, b$  에 대하여  $\frac{8a}{3b}$  의 값은?(단,  $ab \neq 0$ )

①  $-\frac{32}{9}$

②  $-2$

③  $2$

④  $4$

⑤  $\frac{32}{9}$

해설

$y = x$  대칭시키면 직선은

$$bx + ay + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a},$$

$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$  과 수직이 되려면,

$\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$  가 되어야 한다.

$$\therefore \frac{8a}{3b} = \frac{8}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right) = 2$$

11. 점  $(a-4, a-2)$  를  $x$  축의 방향으로 4만큼 평행이동한 다음,  $y = x$  에 대하여 대칭이동한 점과 원점 사이의 거리가 2일 때, 처음 점의 좌표를  $(p, q)$  라 한다.  $p^2 + q^2$  의 값을 구하여라. (단,  $a \neq 0$ )

▶ 답:

▷ 정답: 4

### 해설

$$(a-4, a-2) \rightarrow (a, a-2)$$

( $x$  축으로 4만큼 평행이동)

$$(a, a-2) \rightarrow (a-2, a)$$

( $y = x$  에 대칭이동)

$(a-2, a)$  와 원점 사이의 거리는

$$\sqrt{(a-2)^2 + a^2} = 2$$

$$2a^2 - 4a + 4 = 4,$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a \neq 0)$$

처음 점의 좌표  $(a-4, a-2)$  에  $a = 2$  를 대입하면

구하는 점의 좌표  $(p, q) = (-2, 0)$

$$\therefore p^2 + q^2 = 4$$

12. 점  $(1, 2)$  를 직선  $y = 2x + 1$  에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를  $(a, b)$  라고 할 때, 실수  $a, b$  에 대하여  $5(a + b)$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

### 해설

두 점  $(1, 2), (a, b)$  를 이은 선분의 중점은

$$\left( \frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2} \right)$$

이 점이 직선  $y = 2x + 1$  위의 점이므로

$$\frac{2+b}{2} = 2 \cdot \frac{1+a}{2} + 1$$

$$\therefore 2a - b = -2 \quad \text{..... ㉠}$$

또한, 두 점  $(1, 2), (a, b)$  를 지나는 직선이

직선  $y = 2x + 1$  과 수직이므로

$$\frac{b-2}{a-1} = -\frac{1}{2}$$

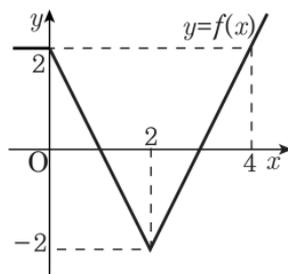
$$\therefore a + 2b = 5 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

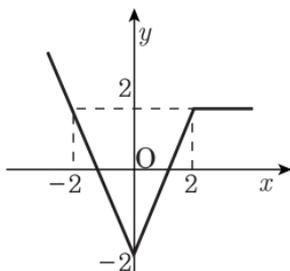
$$a = \frac{1}{5}, b = \frac{12}{5}$$

$$\text{따라서, } 5(a+b) = 5 \cdot \left( \frac{1}{5} + \frac{12}{5} \right) = 5 \cdot \frac{13}{5} = 13$$

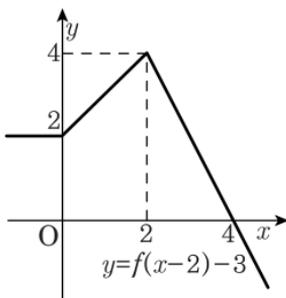
13. 방정식  $y = f(x)$  가 나타내는 도형이 그림과 같을 때,  $y = f(2-x)$  가 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?



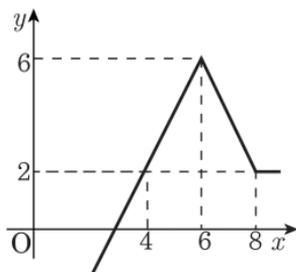
①



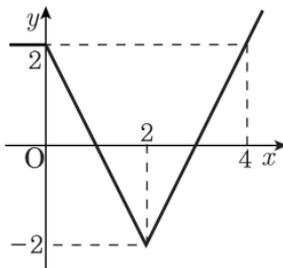
②



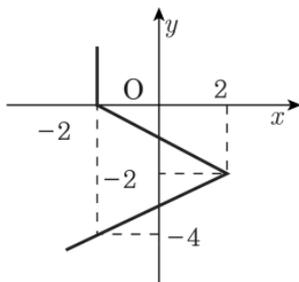
③



④



⑤



해설

$$y = f(2-x) \Leftrightarrow y = f(2 \cdot 1 - x)$$

따라서  $y = f(x)$  의 그래프를 직선  $x = 1$  에 대하여 대칭이동한 것이다.

그러므로 구하는 도형을 좌표평면 위에 나타내면

① 과 같다.

14. 다음 중 원  $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$  을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

①  $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$

②  $x^2 + y^2 = 1$

③  $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

④  $x^2 + y^2 = 4$

⑤  $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{2}$

### 해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면  
반지름의 길이가 같아야 한다.

$x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$  에서  $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은  
반지름의 길이가 2인 ④이다.

15. 두 집합  $A = \{a, \square, b, d\}$ ,  $B = \{b, c, \square, d\}$  에 대하여  $A \subset B$  이고  $B \subset A$  일 때,  안에 들어갈 알파벳을 차례대로 써넣어라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 :  $c$

▷ 정답 :  $a$

### 해설

$A \subset B$ 이고  $B \subset A$ 는  $A = B$ 이다. 집합  $A, B$ 의 모든 원소가 같아야 하므로 두 집합을 비교하면 집합  $A$ 의  =  $c$ 이고, 집합  $B$ 의  =  $a$ 이다.

16. 집합  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  의 부분집합 중에서  $n$  을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수가 32 개일 때, 자연수  $n$  의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$2^{(n \text{을 제외한 원소의 개수})} = 2^{n-1} = 32 = 2^5 \quad \therefore n = 6$$

17. 두 집합  $A, B$ 에 대하여  $A = \{20, 32, 36\}$ ,  $A \cup B = \{x \mid x \text{는 } 4\text{의 배수}, 20 \leq x \leq 40\}$ 일 때, 집합  $B$ 로 가능한 것은?

①  $\{32, 36, 40\}$

②  $\{24, 28, 36, 40\}$

③  $\{24, 32, 36, 40\}$

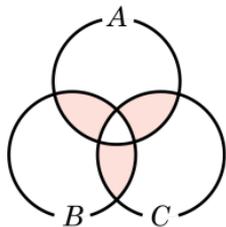
④  $\{24, 26, 30, 34\}$

⑤  $\{32, 36, 38, 40\}$

해설

$A = \{20, 32, 36\}$ ,  $A \cup B = \{20, 24, 28, 32, 36, 40\}$ 이므로  
 $\{24, 28, 40\} \subset B \subset \{20, 24, 28, 32, 36, 40\}$

18. 두 집합  $X, Y$ 에 대하여  $X \star Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$  라고 정의할 때, 다음의 벤다이어그램에서 빗금 친 부분을 나타내는 것은?



- ①  $\{(A \cap B) \cup (A \cap C)\} \star (B \cap C)$   
 ②  $\{(A \cup B) \cap (A \cup C)\} \star (B \cap C)$   
 ③  $\{(A \cap B) \star (A \cap C)\} \cup (B \cap C)$   
 ④  $\{(A \cup B) \star (A \cup C)\} \cup (B \cap C)$   
 ⑤  $\{(A \cap B) \star (A \cap C)\} \cup (B \cap C)$

해설

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = p, \quad B \cap C = q,$$

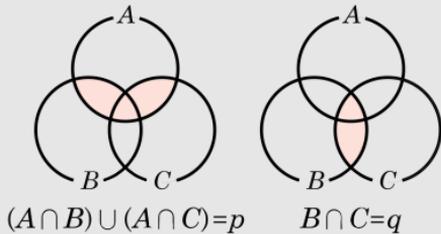
$$\therefore X \star Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$$

$$= (X \cup Y) - (Z \cap Y)$$

$$\{(A \cap B) \cup (A \cap C)\} \star (B \cap C)$$

$$(C)$$

$$\Rightarrow p \star q = (p - q) \cup (q - p)$$



19. 전체집합  $U$ 에 대하여 두 조건  $p, q$  를 만족하는 집합을 각각  $P, Q$  라 할 때,  $P \cup (Q - P) = Q$  이다. 다음 명제 중 반드시 참인 것은?

①  $\sim p \rightarrow q$

②  $q \rightarrow p$

③  $q \rightarrow \sim p$

④  $\sim q \rightarrow \sim p$

⑤  $\sim p \rightarrow \sim q$

해설

$$P \cup (Q - P) = P \cup (Q \cap P^c) \text{ (차집합의 성질)}$$

$$= (P \cup Q) \cap (P \cup P^c) \text{ (분배법칙)}$$

$$= (P \cup Q) \cap U$$

$$= P \cup Q = Q \text{ 이므로 } P \subset Q$$

$$P \subset Q \text{ 이면 } Q^c \subset P^c \text{ 이므로 } \sim q \rightarrow \sim p \text{ 가 참}$$

해설

$P \subset Q$  이면  $p \rightarrow q$  가 참이고 그 대우인  $\sim q \rightarrow \sim p$  도 참이다.

20. 다음 중 거짓인 명제는?

① 모든 소수는 약수를 2개 가진다.

② 어떤 소수는 홀수가 아니다.

③ 모든 실수  $a$  에 대하여  $a^2 > 0$  이다.

④  $a, b$  가 유리수이면  $a + b$  도 유리수이다.

⑤ 중산고등학교 1 학년 학생들은 수학 공부를 열심히 한다.

해설

③ 0도 실수에 포함되므로 거짓이다.

21.  $a \leq x \leq 3$  은  $1 \leq x \leq 4$  이기 위한 충분조건이고,  $1 \leq x \leq 4$  이기 위한 필요조건은  $0 \leq x \leq b$  이다. 이때,  $a$  의 최솟값과  $b$  의 최솟값의 곱은?

① 0

② 1

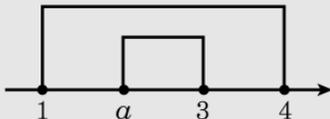
③ 2

④ 3

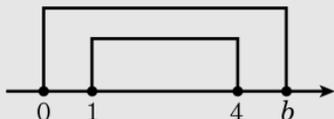
⑤ 4

해설

- (i)  $0 \leq x \leq 3$  은  $1 \leq x \leq 4$  이기 위한 충분조건이므로 다음 그림에서  $1 \leq a \leq 3$  따라서,  $a$  의 최솟값은 1이다.



- (ii)  $1 \leq x \leq 4$  이기 위한 필요조건이  $0 \leq x \leq b$  이므로 다음 그림에서  $b \geq 4$



따라서,  $b$  의 최솟값은 4이다.

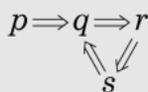
- (i), (ii) 에서  $a$  의 최솟값과  $b$  의 최솟값의 곱은  $1 \times 4 = 4$

22. 조건  $p, q, r, s$  에 대하여  $p$  는  $q$  이기 위한 충분조건,  $r$  은  $q$  이기 위한 필요조건,  $r$  은  $s$  이기 위한 충분조건,  $q$  는  $s$  이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

- ①  $q$  는  $p$  이기 위한 충분조건이다.
- ②  $r$  은  $p$  이기 위한 충분조건이다.
- ③  $p$  는  $r$  이기 위한 필요충분조건이다.
- ④  $r$  은  $s$  이기 위한 필요충분조건이다.
- ⑤  $s$  는  $p$  이기 위한 필요충분조건이다.

해설

주어진 조건을 그림처럼 도식화 해보면  $q, r, s$  는 서로 필요충분조건이고  $p$  는  $q, r, s$  이기 위한 충분조건이다.



∴ ④

23. 실수  $x, y$ 가  $x^2 + y^2 = 5$ 를 만족할 때,  $x + 2y$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 한다. 이 때,  $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

### 해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$$(1^2 + 2^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 2y)^2$$

$x^2 + y^2 = 5$ 이므로

$$25 \geq (x + 2y)^2$$

$$\therefore -5 \leq x + 2y \leq 5$$

$$\therefore M = 5, m = -5$$

$$\therefore M - m = 5 - (-5) = 10$$

24. 두 실수  $x, y$ 의 제곱의 합이 10일 때,  $x + 3y$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 한다. 이 때,  $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 20

### 해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$$(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$$

$$x^2 + y^2 = 10 \text{ 이므로 } 100 \geq (x + 3y)^2$$

$$\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$$

$$\therefore M = 10, m = -10$$

$$\therefore M - m = 10 - (-10) = 20$$

25. 두 정점 A(-1, 0), B(2, 0) 으로부터 거리의 비가 1 : 2 인 점 P 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠  $\triangle PAB$  의 넓이의 최댓값은 3 이다.  
 ㉡  $\angle PBA$  의 최대 크기는  $60^\circ$  이다.  
 ㉢ 점 P 의 자취의 길이는  $4\pi$  이다.

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

두 정점 A(-1, 0), B(2, 0) 으로부터 거리의 비가 1 : 2 인 점 P 의 자취는 (0,0) 과 (-4,0) 을 지름의 양 끝으로 하는 원이다. 따라서 이 원은  $(x+2)^2 + y^2 = 4$  로 나타낼 수 있다.

삼각형 밑변의 길이가 정해져있으므로 높이가 최대일 때 삼각형의 넓이도 최대가 된다. 따라서 원의 반지름인 2 가 높이일 때의 넓이인 3 이 최댓값이다.

$\angle PBA$  의 최대 크기는 점 P 가 원에 접할 때이므로  $\sin(\angle PBA) = \frac{2}{2 - (-2)} = \frac{1}{2}$  에서

$$\angle PBA = 30^\circ$$

점 P 의 자취의 방정식은  $(x+2)^2 + y^2 = 4$  이므로 둘레의 길이는  $4\pi$  이다

26. 두 원  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $(x - 4)^2 + y^2 = 1$  에 동시에 외접하고 반지름의 길이가 2인 원의 중심의 좌표를 구하면?

① (3, 3)

② (3, -3)

③ (4,  $\pm 4$ )

④ ( $\pm 4$ , 4)

⑤ (4,  $\pm 3$ )

### 해설

두 원이 외접하면 중심사이 거리는 반지름 길이 합과 같다.  
중심의 좌표를  $(a, b)$  라 하면,

$\Rightarrow$  i)  $a^2 + b^2 = 25$

ii)  $(a - 4)^2 + b^2 = 9$  연립하면,

$a = 4, b = \pm 3$

$\therefore$  중심은  $(4, \pm 3)$

27. 두 원  $x^2 + y^2 = 16$ ,  $(x - 9)^2 + y^2 = 9$  의 공통외접선의 길이를  $l$  이라 하고 공통내접선의 길이를  $m$  이라 할 때,  $l^2 - m^2$  의 값은?

① 48

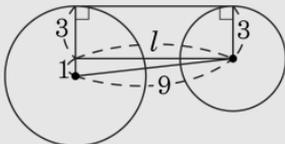
② -48

③ 32

④ -32

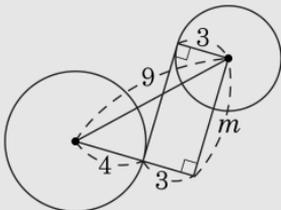
⑤ 30

해설



중심이  $(0, 0)$   $(9, 0)$  이므로  
중심간의 거리는 9이다.

$$\therefore l^2 = 9^2 - 1^2$$



$$\therefore m^2 = 9^2 - 7^2$$

$$\begin{aligned} \therefore l^2 - m^2 &= (9^2 - 1^2) - (9^2 - 7^2) \\ &= -1^2 + 7^2 = 48 \end{aligned}$$



29. 두 점 A(-3, 0), B(1, 0)으로 부터의 거리의 비가 3 : 1인 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은?

- ① 2      ②  $\frac{5}{2}$       ③ 3      ④  $\frac{7}{2}$       ⑤ 4

해설

주어진 조건에서  $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1$ 이므로

$$\overline{AP} = 3\overline{BP}$$

$$\therefore \overline{AP}^2 = 9\overline{BP}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y)라 놓으면

$$(x+3)^2 + y^2 = 9(x-1)^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 - 3x = 0 \therefore \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

따라서 점 P는 중심이 좌표가  $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 이고

반지름의 길이가  $\frac{3}{2}$ 인 원 위를 움직인다.

그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을

H라 하면

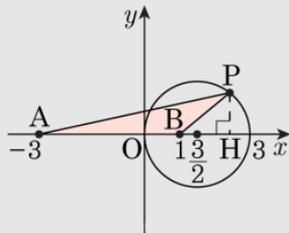
$$\Delta PAB = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{PH}$$

이 때,  $\overline{AB} = 4$ 이고  $\overline{PH}$

의 길이의 최댓값은 반지름의 길이

$\frac{3}{2}$ 이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} = 3$$



30.  $x$  축 위의 두 점  $A(2, 0), B(4, 0)$  과 직선  $y = x$  위를 움직이는 점  $P$ 에 대하여  $\overline{AP} + \overline{BP}$  의 최솟값은?

① 2

②  $2\sqrt{2}$

③  $2\sqrt{3}$

④ 4

⑤  $2\sqrt{5}$

해설

점  $A(2, 0)$  을 직선  $y = x$  에 대하여 대칭이동한 점을  $A'$  이라 하면

$A'(0, 2)$

이때, 다음 그림에서

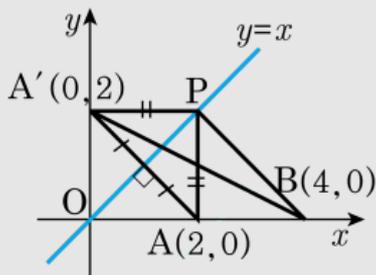
$\overline{AP} = \overline{A'P}$

또,  $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \geq \overline{A'B}$  이

므로

$\overline{AP} + \overline{BP}$  의 최솟값은

$$\overline{A'B} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$



31. 집합  $A = \{(a, b) \mid a \times b = 9, a, b \text{는 자연수}\}$  일 때, 집합  $n(A)$  를  
바르게 구한 것은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$1 \times 9 = 3 \times 3 = 9 \times 1 = 9$  이므로 원소나열법으로 나타내면  
 $A = \{(1, 9), (3, 3), (9, 1)\}$  이다.

$$\therefore n(A) = 3$$

32. 집합  $A = \{0, 2, \{4\}, \{6, 8\}, \emptyset\}$  일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?.

①  $\emptyset \in A$

②  $\{0, 2, \{4\}\} \subset A$

③  $n(A) = 5$

④  $\{4\} \subset A$

⑤  $\{6, 8\} \in A$

해설

④  $\{4\} \in A$

33. 세 집합  $A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$ ,  $B = \{x \mid x \text{는 } \square \text{의 약수}\}$ ,  
 $C = \{x \mid x \text{는 } 64 \text{의 약수}\}$ 에 대하여  $A \subset B \subset C$ 가 동시에 성립하기  
 위한  $\square$ 의 값을 모두 구하면?

① 4

② 8

③ 12

④ 16

⑤ 20

해설

$A = \{1, 2, 4, 8\}$ ,  $C = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$  집합  $A$ 를 포함  
 하면서 집합  $C$ 에 포함되는 집합이 되려면  $\square$ 는 64의 약수 중  
 8의 배수여야 한다. 따라서  $\square = 8, 16, 32, 64$

34. 집합  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  이고, 다음 조건을 만족하는 집합  $B$ 의 갯수를 구하여라.

$$\begin{aligned} B &\subset A \\ 2 &\in B \\ n(B) &= 3 \end{aligned}$$

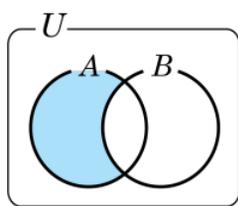
▶ 답:                         개

▶ 정답: 6개

#### 해설

집합  $B$ 는 원소 2를 반드시 포함하고 원소의 갯수가 3개인 집합  $A$ 의 부분집합이다. 따라서 만족하는 집합  $B$ 를 구하면  $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}$  이고, 총 6개이다.

35. 다음 중 다음 벤 다이어그램의 색칠된 부분이 나타내는 집합에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르면 ?



- ①  $A - B$  라고 쓰며,  $A$  마이너스  $B$  라고 읽는다.  
 ②  $A$  에도 속하고  $B$  에도 속하는 원소들로 이루어진 집합이다.  
 ③  $A - B = \{x | x \in A \text{ 그리고 } x \notin B\}$   
 ④  $A - B = B - A$   
 ⑤  $A - B = A \cap B^c$

### 해설

- ①  $A - B$  라고 쓰며,  $A$  차집합  $B$  라고 읽는다.  
 ②  $A$  에는 속하지만  $B$  에도 속하지 않는 원소들로 이루어진 집합이다  
 ④  $A - B \neq B - A$

36. 자연수 전체의 집합의 부분집합  $A = \{a|a \text{는 } 24 \text{의 약수}\}$ ,  $B = \{b|b \text{는 } 36 \text{의 약수}\}$  에 대하여  $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$  의 모든 원소의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 95

해설

$$A = \{a|a \text{는 } 24 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$B = \{b|b \text{는 } 36 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= \{8, 9, 18, 24, 36\}\end{aligned}$$

따라서 원소의 총합은  $8 + 9 + 18 + 24 + 36 = 95$

37. 전체집합  $U = \{x|x \text{는 } 41 \text{ 이하의 소수}\}$  의 두 부분집합  $A, B$  에 대하여  $n(A^c \cap B) = 4$ ,  $n(B^c) = 7$ ,  $n(A^c \cap B^c) = 4$  일 때,  $n(A - B)$  의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$n(U) = 13$  이므로

$n(B) = n(U) - n(B^c) = 6$

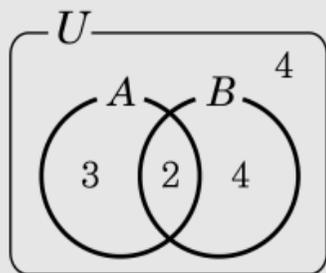
$A^c \cap B = B - A$  이므로

$n(B - A) = n(A^c \cap B) = 4$

$n((A \cup B)^c) = n(A^c \cap B^c) = 4$

벤 다이어그램에 각 부분의 원소의 개수를 적어보면 따라서

$n(A - B) = 13 - (6 + 4) = 3$  이다.



38. 두 조건  $p, q$ 를 만족하는 집합을 각각  $P, Q$ 라 하자.  $\sim q$ 가  $p$ 이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

①  $P^c \subset Q$

②  $Q \subset P$

③  $Q - P = \phi$

④  $P - Q = P$

⑤  $P - Q = \phi$

해설

$p \rightarrow \sim q$ 이므로 진리집합으로 표현하면,  $P \subset Q^c$ 이다.

즉,  $P \cap Q^c = P \Rightarrow P - Q = P$

39. 한 점  $P(a, b)$  에서 두 원  $(x-4)^2+(y+1)^2 = 4$  와  $(x-2)^2+(y-2)^2 = 9$  에 그은 각각의 접선과 두 원과의 접점을 A, B 라 할 때,  $\overline{PA} = \overline{PB}$  인 점  $P(a, b)$  의 자취를 구하면?

①  $2a - 3b - 7 = 0$

②  $2a - 3b + 7 = 0$

③  $a^2 + b^2 = 3$

④  $a^2 + b^2 = 4$

⑤  $a^2 + b^2 = 5$

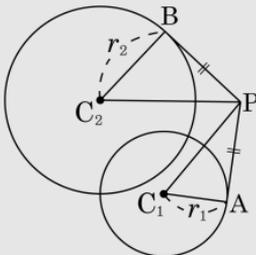
해설

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 4, (x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$$

문제의 조건에서

$$\overline{PA} = \overline{PB} \text{ 이므로 } (\overline{PA})^2 = (\overline{PB})^2$$

$$\Rightarrow (\overline{PC}_1)^2 - r_1^2 = (\overline{PC}_2)^2 - r_2^2$$



원의 중심  $C_1 = (4, -1)$ ,  $C_2 = (2, 2)$ ,

반지름  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 3$

$$\therefore (a-4)^2 + (b+1)^2 - 4 = (a-2)^2 + (b-2)^2 - 9$$

$\therefore$  위를 정리하면  $2a - 3b - 7 = 0$

40. 자연수  $n$ 을 적당한 정수  $k_i$ 를 써서  $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_z}$ 로 나타낼 때,  $A(n) = \{k_1, k_2, \cdots, k_z\}$ 으로 정의한다. (단,  $0 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_z$ ) 이 때,  $A(29)$ 의 원소의 총합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

### 해설

문제의 요구대로 29를 2진법의 전개식으로 나타내면  $29 = 16 + 8 + 4 + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0$ 이다.

$$\therefore A(29) = \{4, 3, 2, 0\}$$

$$\text{원소의 총합은 } 4 + 3 + 2 + 0 = 9$$