

1. 다음 중 함수가 아닌 것을 고르면?

① $2y = x - 1$

② $y = -x^2 - 8$

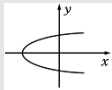
③ $y = 5$

④ $x = y^2 - 4$

⑤ $y = 3|x| - 1$

해설

함수는 하나의 x 값에 두 개 이상의 y 값이 대응될 수 없다.



④ : $x = y^2 - 4$

2. $x^2 \neq 1$ 이고, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 이라 할 때, $f(-x)$ 를 $f(x)$ 를 사용해서 나타내면 무엇인지 고르면?

① $f(x)$

② $-f(x)$

③ $\{f(x)\}^2$

④ $\frac{1}{f(x)}$

⑤ $2f(x)$

해설

$$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{1}{f(x)}$$

3. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{y \mid y \text{는 정수}\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 가 $f(n) = (n^3 \text{을 } 7 \text{로 나눈 나머지})$ 로 정의할 때, 치역의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$1^3 = 1$$

즉 나머지 : 1

$$2^3 = 7 \times 1 + 1$$

즉 나머지 : 1

$$3^3 = 27 = 7 \times 3 + 6$$

즉 나머지 : 6

$$4^3 = 64 = 7 \times 9 + 1$$

즉 나머지 : 1

$$5^3 = 125 = 7 \times 17 + 6$$

즉 나머지 : 6

따라서 치역은 $\{1, 6\}$

$\therefore$ 치역의 모든 원소의 합은 7이다.

4. 함수 $f : A \rightarrow B$ 에서 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ 이고,
 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 일 때, $\{f(1)\}^2 + \{f(2)\}^2 + \{f(3)\}^2 + \{f(4)\}^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 이므로

$B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ 에서 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ 을 사용하여 $1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 을 만들 수 있는 경우는 더하는 순서에 상관없이 $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3}$ 으로 표현된다.

이 때, 정의역 중에서 $1, \sqrt{2}$ 에 대응하는 것은 1개이고 $\sqrt{3}$ 에 대응하는 것은 2개이어야 한다.

$$\begin{aligned} & \text{따라서 } \{f(1)\}^2 + \{f(2)\}^2 + \{f(3)\}^2 + \{f(4)\}^2 \\ &= 1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 9 \end{aligned}$$

5. 다음 <보기> 중 서로 같은 함수끼리 짝지어진 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $f(x) = x - 2, g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

㉡ $f(x) = |x|, g(x) = \sqrt{x^2}$

㉢ 정의역이 $X = \{-1, 1, 2\}$ 일 때,
 $f(x) = x^3, g(x) = 2x^2 + x - 2$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠은 $x = 2$ 에서 다른 함수이나

㉡, ㉢는 주어진 모든 정의역에서 같은 함수이다.

6. 공집합이 아닌 두집합 X, Y 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3$, $g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, 정의역 X 가 될 수 있는 집합의 개수는 a 개이다. a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로 집합 X 는 방정식 $f(x) = g(x)$ 를 만족하는 x 의 값을 원소로 갖는 집합이다.

$$x^2 - x - 3 = x + 5 \text{에서 } x^2 - 2x - 8 = 0, (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = -2$$

즉, 집합 $\{-2, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X 가 될 수 있으므로 집합 X 의 개수는 $2^2 - 1 = 3(\text{개})$ 이다.

$$\therefore a = 3$$

7. $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid -2 \leq y \leq 2\}$ 에서 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = ax + b (a > 0)$ 로 정의되는 함수 f 가 일대일대응일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① -2

② 2

③ $-\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{2}$

⑤ -1

해설

일대일 대응이고 $a > 0$ 이므로

$$f(-1) = -2 \quad f(2) = 2$$

$$\therefore -a + b = -2, \quad 2a + b = 2$$

$$\Rightarrow a = \frac{4}{3} \quad b = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = -2$$

8. 항등함수와 상수함수에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?(단, R 는 실수 전체의 집합이다.)

- ① 항등함수는 일대일 대응이다.
- ② $f: R \rightarrow R$ 가 항등함수이면 $f(x) = x$ 이다.
- ③ 항등함수를 그래프로 나타내면 항상 직선 $y = x$ 가 된다.
- ④ 집합 R 에서 R 로의 상수함수는 오직 하나뿐이다.
- ⑤ 상수함수를 그래프로 나타내면 항상 직선이 된다.

해설

③ 정의역과 공역이 실수 전체의 집합일 경우에만 항등함수의 그래프가 직선 $y = x$ 이다.

(반례) $f: X \rightarrow Y, f(x) = x$ 에서

$X = \{1, 2, 3\}, Y = \{1, 2, 3\}$ 이면

$y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 가 아니다.

④ 집합 R 에서 R 로의 상수함수는 무수히 많다.

⑤ 정의역이 실수 전체의 집합일 경우에만 상수함수의 그래프가 직선이 된다.

(반례) $f: X \rightarrow Y, f(x) = 3$ 에서

$X = \{1, 2, 3\}$ 이면 $y = f(x)$ 는 직선이 아니다.

따라서, 옳지 않은 것은 ③, ④, ⑤이다.

9. 다음 보기의 함수 중 일대일대응인 것은 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = 2x - 3$

㉡ $g(x) = x^2 + x$

㉢ $h(x) = |x| - 2$

㉣ $k(x) = x^3$

① 0 개

② 1 개

③ 2 개

④ 3 개

⑤ 4 개

해설

㉠, ㉣은 증가함수이므로 일대일대응

㉡ $g(-2) = g(1) = 2$ 이므로
일대일대응이 아니다.

㉢ $h(-2) = h(2) = 0$ 이므로
일대일대응이 아니다.

그러므로 일대일대응인 것은 2 개이다.

10. 집합 $X = \{a, b, c\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 중 일대일대응이 아닌 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 21 개

해설

X 에서 X 로의 함수의 총 개수에서
 X 에서 X 로의 일대일대응의 개수를
제외하면 된다.

X 에서 X 로의 함수의 총 개수 : $3^3 = 27$

X 에서 X 로의 일대일대응의 개수

: $3 \times 2 \times 1 = 6(\text{개})$

$\therefore 27 - 6 = 21(\text{개})$

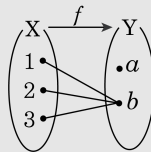
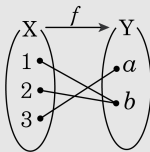
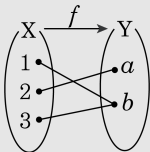
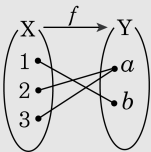
11. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중 $f(1) = b$ 인 것의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 4 개

해설

$f(1) = b$ 인 함수 f 는 다음과 같다
따라서, 구하는 함수 f 는 4 개이다.



12. 집합 $X = \{-1, 1, -i, i\}$ 에 대하여 $f : X \rightarrow Y$ 인 함수 $f(x) = x^3$ 의 치역을 구하여 모든 원소를 각각 제공하여 모두 합하면?

① -1

② -2

③ 0

④ 1

⑤ 2

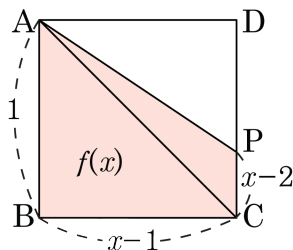
해설

치역 $Y = \{-1, 1, i, -i\}$ 이다.

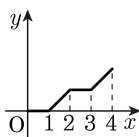
모든 원소를 제공하여 더하면

$$(-1)^2 + 1^2 + (-i)^2 + i^2 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

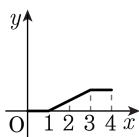
13. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P 가 있다. 점 P 는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B 를 돌아 다시 점 A 로 돌아온다. 점 P 가 움직인 거리를 x , 선분 AP 가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$ 라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



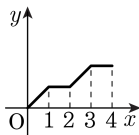
①



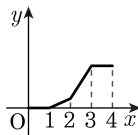
②



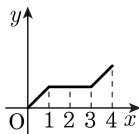
③



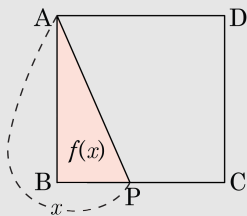
④



⑤



해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \leq x \leq 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \leq x \leq 3) \\ 1 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

한편, 각 구간의 경계점에서

함수는 연속이므로 ②가 옳다.

14. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$ 가 일대일대응이 되기 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$

② $-1 < a < 1$

③ $0 < a < 1$

④ $a < 1$

⑤ $a < -1, a > 1$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이 되기 위해서는
 $x \geq 1$ 에서 $f(x)$ 가 증가함수이므로
 $x < 1$ 에서도 $f(x)$ 는 증가함수이어야 한다.

$$\therefore -2(a-1) > 0$$

$$\therefore a < 1$$

15. 퀴즈대회에 나간 호준이는 다음에 주어진 마지막 문제를 맞히면 우승이다. 호준이가 우승할 수 있는 답을 고르면?

집합 $A = \{a, b, c\}$ 일 때, A 에서 A 로의 함수 $f : A \rightarrow A$ 에 대하여,

함수의 개수는 m 개,

일대일 대응 함수의 개수는 n 개,

상수 함수는 s 개,

항등함수는 r 개이다.

$m + n + s + r$ 의 값을 구하여라.

① 21

② 27

③ 33

④ 37

⑤ 43

해설

함수의 개수는 $3^3 = 27$ (가지) $\therefore m = 27$

일대일 대응의 개수는

$3 \times 2 \times 1 = 6$ (가지) $\therefore n = 6$

상수함수의 개수는 치역이 a, b, c 인 경우의 3가지

$\therefore s = 3$

항등함수의 개수는 1가지 $\therefore r = 1$

따라서 $m + n + s + r = 27 + 6 + 3 + 1 = 37$

16. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여

I. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

II. $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$

① 2 개

② 4 개

③ 6 개

④ 8 개

⑤ 12 개

해설

조건 I에서, $x_1 = 0, x_2 = 0$ 이면

$$f(0) = f(0) + f(0) \text{ 에서 } f(0) = 0$$

$x_1 = 1, x_2 = -1$ 이면

$$f(0) = f(1) + f(-1) \text{ 에서, } f(-1) = -f(1)$$

이때, 조건 II에 의해

$$f(1) \neq 0, f(-1) \neq 0$$

따라서, 두 조건을 만족시키는

함수 f 의 개수는 0이 대응할 수 있는

원소는 0의 1가지,

1이 대응할 수 있는 원소는

-2, -1, 1, 2의 4가지,

-1이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$ 의 1가지,

따라서, $1 \times 4 \times 1 = 4$ (개)

17. 자연수에서 정의된 함수 f 가 임의의 자연수 n 에 대하여 관계식 $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ 을 만족할 때, 다음 중 $2f(4) + 3f(5)$ 와 함숫값이 같은 것은? (단, $f(1) \neq 0$)

① $2f(6)$

② $2f(7)$

③ $f(7)$

④ $f(8)$

⑤ $f(9)$

해설

주어진 관계식 $f(n+2) = (n+1) + f(n)$ 을 이용하여 $f(4) + f(5) = f(6)$ 이므로

$$\begin{aligned} 2f(4) + 3f(5) &= f(4) + f(5) + f(4) + f(5) + f(5) \\ &= f(6) + f(6) + f(5) \end{aligned}$$

또 $f(5) + f(6) = f(7)$, $f(6) + f(7) = f(8)$ 이므로
 $2f(4) + 3f(5) = f(6) + f(7) = f(8)$ 이다.