1. 다음 두 다항식 A, B에 대하여 $A-B$를 구하면?

$$A=2y^2+x^2-3xy,\ B=-4x^2-2xy+5y^2$$

① $5x^2-2xy+3y^2$
② $5x^2-xy-3y^2$
③ $5x^2+xy+3y^2$
④ $5x^2+2xy-3y^2$
⑤ $5x^2+3xy+3y^2$

해설

동류항끼리 계산해 준다.

$$\begin{aligned} A-B &= (2y^2+x^2-3xy)-(-4x^2-2xy+5y^2) \\ &= 5x^2-xy-3y^2 \end{aligned}$$

2. 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $\triangle$, $\blacktriangledown$를 $A\triangle B = 2A + B$, $A\blacktriangledown B = A - 3B$로 정의한다.

$A = 2 + 3x^2 - x^3$, $B = x^2 + 3x + 1$일 때 $A\blacktriangledown(B\triangle A)$를 구하면?

① $2x^3 - 18x - 10$

② $2x^3 - 12x^2 - 18x - 10$

③ $2x^3 + 12x^2 + 18x + 10$

④ $2x^3 + 12x^2 + 18x - 10$

⑤ $2x^3 - 12x^2 + 18x + 10$

해설

$$\begin{aligned} A\blacktriangledown(B\triangle A) &= A\blacktriangledown(2B + A) \\ &= A - 3(2B + A) = -2A - 6B \end{aligned}$$

위와 같이 식을 간단히 정리한 후 A, B에 대입하여 정리한다.

3. $(2ax^2)^3 \times (-3a^2x)^2$ 을 간단히 하면?

① $72a^7x^8$ ② $-72a^7x^8$ ③ $72a^{12}x^{12}$

④ $-72a^{12}x^{12}$ ⑤ $48a^8x^7$

해설

$(2ax^2)^3 \times (-3a^2x)^2 = 8a^3x^6 \times 9a^4x^2 = 72a^7x^8$

4. 다음 식을 계산했을 때, 몫은?

$$(4x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x + 1) \div (x^2 - x + 1)$$

① $4x^2 - 3x + 2$ ② $4x^2 - x - 2$ ③ $4x^2 - 2x + 1$

④ $-4x^2 - x - 2$ ⑤ $-4x^2 + x - 2$

해설

$\therefore$ 몫 : $4x^2 - x - 2$, 나머지 : $-5x + 3$

5. x 에 대한 다항식 $A = 2x^3 + 5x^2 + 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x + 1$ 이고, 나머지가 $-6x + 2$ 이다. 이 때, 다항식 B 를 구하면?

① $x^2 + 2x + 2$ ② $x^2 + x + 2$ ③ $x^2 - x + 2$

④ $x^2 - 2x + 2$ ⑤ $x^2 - 3x + 2$

해설

$A = B(2x+1) - 6x + 2$ 에서

$B(2x+1) = 2x^3 + 5x^2 + 6x + 2$

$\therefore B = (2x^3 + 5x^2 + 6x + 2) \div (2x+1)$

$= x^2 + 2x + 2$

6. 다항식 $A = 2x^3 - 7x^2 - 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x - 1$, 나머지가 $-7x - 2$ 이다. 다항식 $B = ax^2 + bx + c$ 일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 14 ⑤ 17

해설

$A = 2x^3 - 7x^2 - 4 = B(2x-1) - 7x - 2$ 이다.

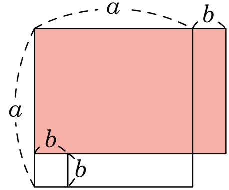
$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = B(2x-1)$

좌변을 $2x - 1$ 로 나누면

$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (2x-1)(x^2 - 3x + 2)$

$\therefore \ B = x^2 - 3x + 2$

7. 다음 그림에서 색칠한 부분이 나타내고 있는 곱셈공식은 무엇인가?



① $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

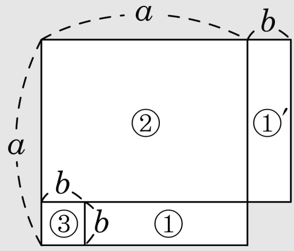
② $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

③ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

④ $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

⑤ $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$

해설



$(a+b)(a-b) = ①' + ②$

$①' = ①$이므로

$(a+b)(a-b) = ① + ② = a^2 - b^2$

$\therefore\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

8. $(x-2y-3z)^2$을 전개하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면?

① $x^2+4y^2+9z^2-4xy+12yz-6zx$

② $x^2-4xy+4y^2-9z^2+12yz-6zx$

③ $x^2-(4y+6z)x+4y^2+12yz+9z^2$

④ $4y^2+12yz+9z^2+(-4y-6z)x+x^2$

⑤ $9z^2+4y^2+x^2$

해설

$(x-2y-3z)^2=x^2-(4y+6z)x+4y^2+12yz+9z^2$

9. $(x+y)^n$ 을 전개할 때 항의 개수는 $n+1$ 개이다. 다항식 $\{(2a-3b)^3(2a+3b)^3\}^4$ 을 전개할 때, 항의 개수를 구하면 ?

① 7 개 ② 8 개 ③ 12 개 ④ 13 개 ⑤ 64 개

해설

$\{(2a-3b)^3(2a+3b)^3\}^4$
$= \{(4a^2-9b^2)^3\}^4$
$= (4a^2-9b^2)^{12}$
$\therefore\ (4a^2-9b^2)^{12}$ 의 항의 개수는 13 개이다.

10. $(x^3+ax+2)(x^2+bx+2)$를 전개했을 때, x^2과 x^3의 계수를 모두 0이 되게 하는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$(x^3+ax+2)(x^2+bx+2)$

$=x^5+bx^4+(a+2)x^3+(ab+2)x^2+(2a+2b)x+4$

(x^2의 계수)=(x^3의 계수)=0이므로

$ab+2=0,\ a+2=0$

따라서 $a=-2,\ b=1$

$\therefore a+b=-1$

11. 모든 모서리의 합이 36, 겉넓이가 56 인 직육면체의 대각선의 길이는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a, b, c라 하자.

$4(a+b+c)=36,\ 2(ab+bc+ca)=56$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$a^2+b^2+c^2=81-56=25$

$$\therefore\ (\text{대각선의 길이}) = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{25}=5$$

12. 등식 $x^2+2x+3=a(x-1)^2+bx+c$가 x에 대한 항등식이 되도록 상수 $a,\ b,\ c$의 값을 정할 때, $a+b+c$의 값은?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

우변을 전개하여 동류항으로 묶는다.

$$\begin{aligned} x^2+2x+3 &= a(x-1)^2+bx+c \\ &= ax^2+(b-2a)x+a+c \end{aligned}$$

$a=1,\ b-2a=2,\ a+c=3$

$a=1,\ b=4,\ c=2$

$a+b+c=7$

13. $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x-1)$이 x에 대한 항등식이 되도록 a, b, c의 값을 정하면?

① $a = 1,\ b = -1,\ c = 2$

② $a = -1,\ b = 1,\ c = -2$

③ $a = 1,\ b = 1,\ c = 2$

④ $a = -1,\ b = -1,\ c = -2$

⑤ $a = 1,\ b = -1,\ c = -2$

해설

수치대입법을 이용한다.

$x = 0$을 대입 $-2 = -2a \quad \therefore\ a = 1$

$x = 1$을 대입 $-3 = 3b \quad \therefore\ b = -1$

$x = -2$를 대입 $12 = 6c \quad \therefore\ c = 2$

14. 임의의 x 에 대하여 $x^3-1=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 를 만족하는 상수 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 합 $a+b+c+d$ 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

양변에 $x=0$ 을 대입 하면

$-1=a+b+c+d$

$\therefore\ a+b+c+d=-1$

해설

$x^3-1=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

$=(x+1)\{a(x+1)^2+b(x+1)+c\}+d$

$=(x+1)[(x+1)\{a(x+1)+b\}+c]+d$ 이므로

x^3-1 을 $x+1$ 로 연속으로 나눌 때

차례대로 나오는 나머지가 $d,\ c,\ b$가 되고 마지막 몫이 a 이다.

$$\begin{array}{r|rrrrl}
-1 & 1 & 0 & 0 & -1 & \\
 & & -1 & 1 & -1 & \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 1 & \boxed{-2} & \leftarrow \quad \text{d}\\
 & & -1 & 2 & & \\
\hline
-1 & 1 & -2 & \boxed{3} & \leftarrow & \text{c}\\
 & & -1 & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{-3} & \leftarrow \text{b} & & \\
 & \uparrow & & & & \\
 & \text{a} & & & &
\end{array}$$

15. 등식 $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1)$ 이 x 에 관한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b, c 에 대하여 $a + 2b + 3c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$-2 = 2a \quad \therefore\ a = -1$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$-3 = -b \quad \therefore\ b = 3$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$0 = 2c \quad \therefore\ c = 0$

$\therefore\ a + 2b + 3c = 5$

16. $\dfrac{2x+3a}{4x+1}$가 x에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12a=2$

해설

$\dfrac{2x+3a}{4x+1}=k$ (일정값 $=k$)라 놓으면 $2x+3a=k(4x+1)$에서

$(2-4k)x+3a-k=0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로,

$2-4k=0,\ 3a-k=0$

$k=\dfrac{1}{2}$이므로 $3a=k$에서 $a=\dfrac{1}{6}$

$\therefore\ 12a=2$

17. 다항식 x^3+ax+b가 다항식 x^2-x+1로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로

$x^2=x-1$을 대입하면

$ax+(b-1)=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로,

$a=0,\ b-1=0$

$\therefore\ a=0,\ b=1$

$\therefore a+b=1$

해설

x^3+ax+b

$=(x^2-x+1)Q(x)$

$=(x^2-x+1)(x+b)$

$\therefore\ b=1,\ a=0$

18. $(x^3+2x^2-3x+2)^4(2x-1)^7$ 을 전개했을 때, 모든 계수들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(x^3+2x^2-3x+2)^4 \cdot (2x-1)^7$
$= a_0x^{19}+a_1x^{18}+a_2x^{17}+\cdots+a_{19}$ 로 놓으면
계수들의 총합 $a_0+a_1+\cdots+a_{19}$ 는 양변에 $x=1$ 을 대입한 결과와 같으므로 항등식의 성질에서
$(1+2-3+2)^4 \cdot (2-1)^7 = 2^4 = 16$

19. 다항식 x^3-2x^2+5x-6을 일차식 $x-2$로 나눌 때의 나머지는?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$$f(x)=x^3-2x^2+5x-6$$
$$=(x-2)Q(x)+R$$

$$\therefore\ f(2)=2^3-2\cdot 2^2+5\cdot 2-6$$
$$=8-8+10-6$$
$$=4$$

$$\therefore\ R=4$$

20. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m-n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

나머지 정리를 이용한다.
주어진 식에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면,
$(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)+1=5\cdots$ ㉠
$(2)^3+m(2)^2+n\cdot 2+1=3\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하면,
$m=\dfrac{2}{3},\ n=-\dfrac{13}{3}$
$\therefore\ m-n=5$

21. $f(x)=x^2-ax+1$이 $x-1$로 나누어 떨어질 때 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

해설

$f(1)=1^2-a\cdot 1+1=0$

$\therefore\ a=2$

22. 다항식 $f(x)$를 두 일차식 $x-1$, $x-2$로 나눌 때의 나머지는 각각 2, 1이다. 이때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때 나머지는?

① $x+3$ ② $-x+3$ ③ $x-3$

④ $-x-3$ ⑤ $-x+1$

해설

$f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지는 각각 $2, 1$이므로

$f(1)=2, f(2)=1$, 구하는 나머지를 $ax+b$라 하자.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x)+ax+b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

양변에 각각 $x=1$, $x=2$를 대입하면

$f(1)=a+b=2$, $f(2)=2a+b=1$

두 식을 연립하여 구하면 $a=-1, b=3$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-x+3$

23. 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$ 로 나누면 나머지는 -4 이고, 그 몫을 $x+2$ 로 나누면 나머지는 2 이다. 이때, $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$f(x)=(2x-1)Q(x)-4$ 라 하면
$f(-2)=-5Q(-2)-4$
그런데 $Q(-2)=2$ 이므로 $f(-2)=-14$

24. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나눈 나머지는 $2x+1$이고, $g(x)$를 x^2-5x+6으로 나눈 나머지는 $x-4$이다. 이 때, $(x+2)f(x)+3g(x+1)$을 $x-2$로 나눈 나머지를 구하면?

① 7　　② 9　　③ 13　　④ 17　　⑤ 23

해설

$f(x)=(x^2-4)p(x)+2x+1$에서 $f(2)=5$
$g(x)=(x^2-5x+6)q(x)+x-4$에서 $g(3)=-1$
$h(x)=(x+2)f(x)+3g(x+1)$이라 놓으면,
$h(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는
$h(2)=4f(2)+3g(3)=17$

25. 다항식 $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x - k$ 가 $x - 2$ 를 인수로 가질 때, k 의 값은?

① 8　　② 10　　③ 12　　④ 16　　⑤ 20

해설

$f(2) = 24 - 16 + 4 - k = 0$

$\therefore\ k = 12$

26. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - k$ 가 $x-2$를 인수로 가질 때, k를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$f(x)$ 가 $x-2$를 인수로 갖는다는 것은 $f(x)$가 $x-2$로 나누어 떨어진다는 뜻이다.

즉, $f(2) = 0$을 만족시키는 k를 구하면,

$f(2) = 2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 - k = 0$

$\therefore\ k = 6$

27. 다항식 $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + k$가 일차식 $x-1$을 인수로 가질 때, 이 다항식 $f(x)$를 인수분해 하면?

① $(x-2)(x-1)(x+1)$　② $(x-1)x(x+2)$

③ $(x+1)(x-1)(x+2)$　④ $(x-2)(x-1)(x+2)$

⑤ $(x-2)(x+1)(x+2)$

해설

$f(x) = (x-1)Q(x) \quad \Rightarrow \quad f(1) = 0$

$\therefore \ f(1) = 2 + k = 0, \qquad \therefore \ k = -2$

즉, $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$= (x-1)(x+1)(x+2)$

28. $3(4x+5\pi)=P$일 때, $6(8x+10\pi)$는?

① $2P$　② $4P$　③ $6P$　④ $8P$　⑤ $18P$

해설

$$6(8x+10\pi)=6\cdot 2(4x+5\pi)=4\cdot 3(4x+5\pi)=4P$$

29. $(x^4-8x^2-9)\div(x^2-9)$를 계산하여라.

① x^2+1 ② x^2-1 ③ x^2+2

④ x^2-2 ⑤ x^2+3

해설

$x^4-8x^2-9=(x^2-9)(x^2+1)$

$\therefore$ (준식)$=x^2+1$

30. $x^4 - 23x^2y^2 + y^4$ 을 인수분해 하면?

① $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$

② $(x^2 + 2xy + y^2)(x^2 - 2xy + y^2)$

③ $(x^2 + 3xy + y^2)(x^2 - 3xy + y^2)$

④ $(x^2 + 4xy + y^2)(x^2 - 4xy + y^2)$

⑤ $(x^2 + 5xy + y^2)(x^2 - 5xy + y^2)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 25x^2y^2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 - (5xy)^2 \\ &= (x^2 + y^2 + 5xy)(x^2 + y^2 - 5xy) \\ &= (x^2 + 5xy + y^2)(x^2 - 5xy + y^2)\end{aligned}$$

31. 세 변의 길이가 $a,\ b,\ c$인 삼각형에 대하여 $(a^2+b^2)c+(a+b)c^2=(a+b)(a^2+b^2)+c^3$이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $b=c$인 이등변 삼각형
② a가 빗변인 직각삼각형
③ $a=c$인 이등변 삼각형
④ c가 빗변인 직각삼각형
⑤ 정삼각형

해설

준식을 c에 관한 내림차순으로 정리하면
$c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c+(a+b)(a^2+b^2)$에서
$c^2\{c-(a+b)\}-(a^2+b^2)\{c-(a+b)\}$
$=\{c-(a+b)\}\{c^2-(a^2+b^2)\}$
$=(c-a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$
a ,b ,c 는 삼각형의 세변이므로
$c-a-b\neq 0$이고 $c^2-a^2-b^2=0$
즉 $c^2=a^2+b^2$이므로 c가 빗변인 직각 삼각형이다.

32. 자연수 $N = p^n q^m r^l$ 로 소인수분해될 때, 양의 약수의 개수는 $(n+1)(m+1)(l+1)$ 이다. 이 때, $38^3 + 3\cdot 38^2 + 3\cdot 38 + 1$ 의 양의 약수의 개수는?

① 9 개 ② 12 개 ③ 16 개 ④ 24 개 ⑤ 32 개

해설

$38 = x$ 라 하면,

$$\begin{aligned} 38^3 + 3\cdot 38^2 + 3\cdot 38 + 1 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ &= (x+1)^3 \\ &= 39^3 \\ &= 13^3 \cdot 3^3 \end{aligned}$$

$\therefore \quad (3+1)(3+1) = 16$

33. $x = 1001$ 일 때, $\dfrac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x + 1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

34. 다음 식을 인수분해하면 $x^4 - 3x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 + axy + by^2)(x^2 + cxy + dy^2)$ 일 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라. (a, b, c, d는 상수)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 7x^2y^2 \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - 7x^2y^2 \\ &= (x^2 + \sqrt{7}xy + 2y^2)(x^2 - \sqrt{7}xy + 2y^2)\end{aligned}$$

$\therefore\ a + b + c + d = 4$

35. 두 다항식 x^3+2x^2-x-2,
$(x-1)\left(3x^2+ax+2a\right)$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-3$

해설

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+2)(x+1)$
$\therefore\ 3x^2+ax+2a$는
$x+2$ 또는 $x+1$을 인수로 가져야 한다.
$f(x)=3x^2+ax+2a$로 놓을 때
$x+2$가 인수이면 $f(-2)=12-2a+2a=12$가 되어 적합하지 않다.
$\therefore\ x+1$를 인수로 갖는다.
$x+1$이 인수이면 $f(-1)=3-a+2a=3+a=0$
$\therefore\ a=-3$

36. 두 다항식 $2x^3+(a-2)x^2+ax-2a$, x^3+2x^2-x-2의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-2$

해설

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+1)(x+2)$

$f(x)=2x^3+(a-2)x^2+ax-2a$라 하면

$f(1)=0$이므로 $f(x)$ 는 $x-1$을 인수로 갖는다.

최대공약수가 이차식이므로 $f(x)$는 $x+1$

또는 $x+2$를 인수로 가져야 한다.

$f(-2)=-8-4a-8-4a\neq 0$이므로

$x+1$이 인수이다.

$\therefore\ f(-1)=0$일 때 $a=-2$

37. 두 다항식 A, B에 대하여 $A = x^2 + ax + 2$, $B = x^2 + bx + c$이고 A, B의 최대공약수가 $x+1$, 최소공배수가 $x^3 + 2x^2 - x - 2$일 때, $a+b+c$의 값은 ?

① -1　　② 0　　③ 2　　④ -2　　⑤ 3

해설

$A = m(x+1)$, $B = n(x+1)$이라 놓으면

$mn(x+1) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$\therefore\ mn = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

$\therefore\ m = x+2$, $n = x-1$ 또는 $m = x-1$, $n = x+2$

$A = (x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$

$B = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$

여기서, $a = 3$, $b = 0$, $c = -1$

$\therefore\ a+b+c = 2$

38. 두 다항식 x^2+3x+p, x^2+px+q의 최소공배수가 $x^3-13x+12$일 때, $p+q$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$x^3-13x+12=(x-1)(x-3)(x+4)$ 두 다항식의 곱이 4차식이고 최소공배수가 3차식이므로 최대공약수는 1차식이다.
$(\because\ AB=GL)$

i) G.C.M. $=x-1$이면 $p=-4,\ q=3$
이 때 두 식은 $(x-1)(x+4)$, $(x-1)(x-3)$이므로 조건에 맞는다.

ii) G.C.M. $=x-3$이면 $p=-18,\ q=45$
이 때 두 식은 $(x-3)(x+6)$, $(x-3)(x-15)$이므로 조건에 맞지 않는다.

iii) G.C.M. $=x+4$일 때도 ii)와 같음

i), ii), iii)에서 $p+q=-1$

39. 두 다항식 $A = x^3 + ax^2 - 4x + 2$ 와 $B = x^3 + bx^2 - 2$ 의 최대공약수가 이차식일 때, $a+b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 상수)

① -3　　② -1　　③ 2　　④ 4　　⑤ 7

해설

$A = Gf(x), B = Gg(x)$ 라 하면
$A + B = G(f(x) + g(x)), A - B = G(f(x) - g(x))$ 이므로
공통인수는 G 를 포함한다.

$$\begin{cases} A + B = 2x^3 + (a+b)x^2 - 4x \\ \qquad\quad\; = x\{2x^2 + (a+b)x - 4\} \\ A - B = (a-b)x^2 - 4x + 4 \end{cases}$$

$A + B$ 에서 x 는 $A - B$ 의 인수가 아니므로 G 가 될 수 없다.
그러므로 $G = 2x^2 + (a+b)x - 4$
$\therefore\ A - B = -G = -2x^2 - (a+b)x + 4$
계수비교하면 $a - b = -2,\ a + b = 4$

40. 최고차항의 계수가 1인 두 이차다항식 A, B에 대하여 A, B의 최대공약수를 $(A,\ B)$, A, B의 최소공배수를 $[A,\ B]$라 하자. 다항식 A, B가

$$(A+B,\ A-B)=2x-3,\ [A+B,\ A-B]=2x^2+x-6$$

을 만족할 때, $2[A,\ B]=0$과 같은 해를 갖는 것은?

① $2x^3+5x^2-6x-9$　　② x^3+4x^2-2x-7

③ x^3-3x^2+5x-1　　④ $3x^3-x^2+2x-1$

⑤ $-x^3+2x^2-5x+7$

해설

$A=aG,\ B=bG\ (a,b$는 서로소$)$라 하자.

$(A+B, A-B)=((a+b)G,\ (a-b)G)=2x-3$ 이므로

G는 $2x-3$

따라서 A,B는 $2x-3$으로 나누어떨어지고 a, b는 일차식이다.

또 $[A+B, A-B]=[(a+b)G, (a-b)G]=2x^2+x-6$

$=(x+2)(2x-3)$ 이므로 $(a+b)(a-b)G=(x+2)(2x-3)$

$\therefore\ (a+b)(a-b)=x+2$ 이고

a, b는 모두 일차식이므로

$a+b=x+2$, $a-b=1$ 이라 하고 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$,

$b=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$\therefore\ [A, B]=\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)(2x-3)$

$=\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}\right)(2x-3)$

$=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{8}{4}x^2-3x+\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}$

$=\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{4}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}$

$\therefore\ 2[A, B]=x^3+\frac{5}{2}x^2-3x-\frac{9}{2}$

따라서 $2[A, B]$와 같은 것은 ① $2x^3+5x^2-6x-9$ 이다.