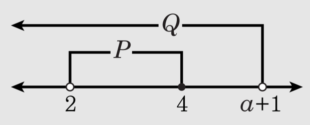
1. 두 조건 $p : 2 < x \le 4, q : x < a + 1$에 대하여 p는 q 이기 위한 충분조건 일 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a > 3$

해설



$p \to q$이므로 $a + 1 > 4 \Rightarrow a > 3$

2. 두 명제 $p \to q$ 와 $q \to r$ 가 모두 참이면 명제 $p \to r$ 도 참이 된다. 이 성질을 이용하여 다음을 구하여라.

네 조건 $p,\ q,\ r,\ s$ 에 대하여 p는 r이기 위한 충분조건, q는 r이기 위한 충분조건, s는 r이기 위한 필요조건, q는 s이기 위한 필요조건이다.

이 때, p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

$p \to r$, $q \to r$, $r \to s$, $s \to q$ 가 참이다. $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$ 이므로 $p \Rightarrow q$ 이다.
$\therefore p$ 는 q 이기 위한 충분조건이다.

3. 자연수 n에 대하여 $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$로 정의된다. 예를 들어, $1! = 1,\ 2! = 2 \times 1,\ 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ 이다. 전체집합 $U = \{x \mid x = n!\ (n,\ x\text{는 자연수})\}$에서 두 조건 p, q가 각각 p : 일의 자리가 0인수, q : 자리수가 네 자리 이상인 수 일 때, 조건 'p 이고 $\sim q$'를 만족하는 집합의 원소의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

'p이고 $\sim q$' $\Rightarrow$ $P \cap Q^c = P - Q$

ⅰ) 일의 자리가 0인 수 중 네자리 미만인 수의 일의 자리가 0이기 위해서는 인수로 2, 5 를 가져야 한다.

$5! = \underline{5} \times 4 \times 3 \times \underline{2} \times 1 = 120$

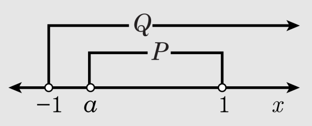
ⅱ) $6! = 6 \times \underline{5} \times 4 \times 3 \times \underline{2} \times 1 = 720$

4. 실수 x에 대하여 두 조건 $p\ :\ a \le x \le 1$, $q\ :\ x \ge -1$이 있다. 명제 $p \to q$를 참이 되게 하는 상수 a의 범위는?

① $a > 1$　　② $a \le 1$　　③ $-1 \le a \le 1$
④ $a \ge -1$　　⑤ $a \le -1$

해설

조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
(i) $a > 1$일 때, $P = \varnothing$ 이므로 $P \subset Q$ $\therefore\ a > 1$
(ii) $a \le 1$ 일 때, 수직선에 나타내면



$\therefore\ -1 \le a \le 1$
(i), (ii)에서 $a \ge -1$

5. 다음 중 명제와 그 역이 모두 참인 것은?

① $xy \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 또는 $y \geq 0$

② $x+y \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 이고 $y \geq 0$

③ $x \geq y$ 이면 $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$

④ $x \leq 2$ 이면 $|x-1| \leq |x-3|$

⑤ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$

해설

① 거짓 : (반례) $x=-2,\ y=-1$ 일 때,
$xy = 2 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $-1 < 0$ 이다.
② 거짓 : (반례) $x=-2,\ y=3$ 일 때,
$x+y = -2+3 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $3 > 0$ 이다.
③ 거짓 : (반례) $x=2,\ y=-2$ 일 때,
$2 \geq -2$ 이지만 $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ 이다.
④ $|x-1| \leq |x-3|$ 의 양변을 제곱하면
$x^2-2x+1 \leq x^2-6x+9$ 에서 $x \leq 2$ 이므로 원래의 명제와 그 역이 모두 참이다.
⑤ 명제 '$a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2+b^2 > 0$' 은 참이지만, 그의 역 '$a^2+b^2 > 0$ 이면 $a > 0$ 이고 $b > 0$'은 거짓이다.

6. 다음은 명제 '정수 x, y, z에 대하여 $x^2 + y^2 = z^2$ 이면 x, y, z 중 적어도 하나는 3의 배수이다.' 가 참임을 대우를 이용하여 증명한 것이다. (가) ~ (마)에 들어갈 말로 <u>틀린</u> 것은?

> 주어진 명제의 대우인 '정수 x, y, z에 대하여 x, y, z 가 모두 3의 배수가 아니면 (가)이다.' 가 참임을 증명해 보자.
> x, y, z 가 모두 3의 배수가 아니면,
> x, y, z 는 각각 $x = 3l \pm 1$, $y = 3m \pm 1$, $z = 3n \pm 1$ (l, m, n 은 정수)로 나타낼 수 있다.
> 이때,
> $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (3l \pm 1)^2 + (3m \pm 1)^2 \\ &= 9l^2 \pm 6l + 1 + 9m^2 \pm 6m + 1 \\ &= 9(l^2 + m^2) \pm 6(l + m) + 2 \end{aligned}$$
> 또는
> $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \text{(나)} \\ &= \text{(다)} \\ &= 9(l^2 + m^2) \pm 6(l - m) + 2 \end{aligned}$$
> 한편,
> $z^2 = (3n \pm 1)^2 = 9n^2 \pm 6n + 1$
> 따라서, $x^2 + y^2 \neq z^2$ 이므로 주어진 명제의 대우는 (라)이다.
> 그러므로 주어진 명제 '$x^2 + y^2 = z^2$ 이면 x, y, z 중 적어도 하나는 3의 배수이다.' 는 (마)이다.

① (가) $x^2 + y^2 \neq z^2$

② (나) $(3l \pm 1)^2 + (3m \pm 1)^2$

③ (다) $9l^2 \pm 6l + 1 + 9m^2 \mp 6m + 1$

④ (라) 참

⑤ (마) 참

해설

$x^2 + y^2$ 는 $(3l \pm 1)^2 + (3m \pm 1)^2$ 또는 $(3l \pm 1)^2 + (3m \mp 1)^2$

7. 학생 수가 50 명인 학급에서 생일을 조사하였을 때, 다음 중 항상 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ 5 명 이상의 생일이 있는 달이 있다.
㉡ 모든 달에 생일이 있다.
㉢ 8 명 이상의 생일이 있는 요일이 있다.
㉣ 생일이 같은 학생이 존재한다.

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉢, ㉣
④ ㉠, ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉢, ㉣

해설

㉠ 50 명의 생일이 12 달에 가장 골고루 퍼져 있을 때, $50 = 12 \times 4 + 2$ 이므로 매달 4 명씩 생일이 있고 나머지 2 명은 어느 달인가에 추가되어야 하므로, 5 명 이상의 생일이 있는 달이 반드시 존재한다.
㉡ 50 명 모두 특정한 달에는 생일이 있지 않을 수도 있으므로 거짓이다.
㉢ ㉠와 마찬가지로 생각해 보면, 50 명의 생일이 일곱 요일에 가장 골고루 퍼져 있을 때는 $50 = 7 \times 7 + 1$ 이므로 어느 요일인가에 8 명의 생일이 있다. 따라서, 참이다.
㉣ 어느 특정한 날에 생일이 같은 학생은 존재할 수도 있고 존재하지 않을 수도 있다.
그러므로 위의 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣ 중에서 항상 맞는 것은 ㉠와 ㉢이다.

8. 다음 중 p 가 q 이기 위한 필요조건이나 충분조건은 <u>아닌</u> 것을 고르면? (단, n 은 자연수, $x,\ y,\ z$ 는 실수)

① $p : A \cup B = A,\ q : B - A = \phi$

② $p : n^2$ 은 12 의 배수이다., $q : n$ 은 12 의 배수이다.

③ $p : xyz \neq 0,\ q : x,\ y,\ z$ 는 모두 0 이 아니다.

④ $p : x^2+y^2+z^2=0,\ q : x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

⑤ $p : |x+y+z| = |x|+|y|+|z|,\ q : xy+yz+zx>0$

해설

① $p : A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A \Leftrightarrow q : B - A = \phi$ ∴ 필요충분조건

② $p : n^2$ 은 12의 배수이다. $\leftarrow q : n$ 은 12 의 배수이다.<반례> n 이 6 이면 n^2 은 12 의 배수이나 n 은 12 의 배수가 아니다. ∴ 필요조건

③ $p : xyz \neq 0 \ \rightarrow\ q : x,\ y,\ z$ 는 모두 0 이 아니다. ∴ 필요충분조건

④ $p : x^2+y^2+z^2=0 \Leftrightarrow x=0, y=0,\ z=0$ $q : x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0 \Leftrightarrow\ x=y=z$

$p :\ x^2+y^2+z^2=0\ \Rightarrow q :\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

∴ 충분조건

⑤ $|x+y+z| = |x|+|y|+|z| \Rightarrow xy+yz+zx\ 0$ <반례> $x=3,\ y=5,\ z=-1$ 을 대입하면 $q \rightarrow p$ 가 성립하지 않는다.∴ 충분조건

9. 다음 중 거짓인 명제는? (단 $x,\ y,\ z,\ a,\ b$ 는 실수이다.)

① 둘레의 길이가 일정한 직사각형 중에서 넓이가 최대인 것은 정사각형이다.

② $xy + yz + zx = 1$ 일 때, $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$

③ $a,\ b,\ c$ 가 양수일 때, $\dfrac{b+c}{a} + \dfrac{c+a}{b} + \dfrac{a+b}{c} \geq 6$

④ $a \geq b \geq 0$ 이면 $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a-b}$

⑤ $xy > x + y > 4$ 이면 $x > 2,\ y > 2$

해설

① $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a = b$일 때 성립)

② $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$

$= \frac{1}{2}\left(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right\} \geq 0$

③ $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2,\ \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2,\ \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$

(단, 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립)

따라서 $\dfrac{b+c}{a} + \dfrac{c+a}{b} + \dfrac{a+b}{c} \geq 6$

④ $(\sqrt{a-b})^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 2\sqrt{a}\sqrt{b} - 2b$

$= 2\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0$

⑤ <반례> $x = \frac{3}{2}$, $y = 10$

또는 $x = \frac{5}{4}$, $y = 8$ 등 여러 경우가 있다.

10. x가 실수일 때, $\dfrac{x^2-x+1}{x^4-2x^3+3x^2-2x+2}$의 최댓값은?

① $-\dfrac{3}{2}$ ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ 2

해설

$x^4-2x^3+3x^2-2x+2$

$=x^4-2x^3+3x^2-2x+1+1$

$=x^2\left(x^2-2x+3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)+1$

$=x^2\left\{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+3\right\}+1$

$=x^2\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+1\right\}+1$

$=x^2\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right)^2+1$

$=(x^2-x+1)^2+1$

$\therefore$ 준식 $=\dfrac{x^2-x+1}{(x^2-x+1)^2+1}$ 이고

$x^2-x+1=\left(x^2-x+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{3}{4}$

$=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ 이므로

$x^2-x+1=t$로 치환 $t\geq\dfrac{3}{4}$ 하면

준 식 : $\dfrac{t}{t^2+1}=\dfrac{1}{\dfrac{t^2+1}{t}}=\dfrac{1}{t+\dfrac{1}{t}}$

여기서 $t+\dfrac{1}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$

$(\because\ t\geq\dfrac{3}{4})$

따라서 $\dfrac{t^{-1}+1}{t}$ 의 최솟값은 2 이고

$\dfrac{t}{t^2+1}$ 의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$ 이다.

11. 공항에서 출국시에 통과되지 않은 물건을 소유하고 있을 때는 경고음이 울리게 되어 있다. 1건 적발될 때마다 출국 심사 시간은 x분씩 늘어나며 y명의 사람들이 심사를 받기 위해 줄을 서서 기다리고 있다. 기본 심사 시간은 한 사람 당 2분이며 10건이 적발되었다고 할 때, 1시간 이내에 심사를 마치기 위한 xy의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

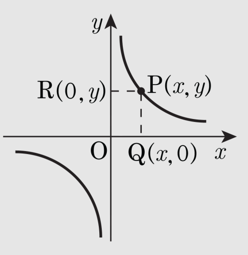
해설

10건이 적발되었으므로 늘어난 심사 시간은 $10x$,
y명이 기다리고 있으므로 기본 심사 시간은 $2y$분이다.
시간이내에 심사를 끝내야 하므로
$10x + 2y \le 60 \cdots$ ㉠
$x > 0,\ y > 0$이므로
산술평균, 기하평균에 의하여
$10x + 2y \ge 2\sqrt{10x \cdot 2y}$
$10x + 2y \ge 2\sqrt{20xy} \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여
$2\sqrt{20xy} \le 60,\ 20xy \le 900$
$\therefore xy \le 45$
따라서 xy의 최댓값은 45이다.

12. 함수 $y = \dfrac{6}{x}$ 의 그래프 위의 한 점 P 에서 x축과 y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라 할 때, 사각형 OQPR 의 둘레의 길이의 최소값은? (단, $x > 0$, O 는 원점)

① $6\sqrt{2}$　② $4\sqrt{6}$　③ $2\sqrt{6}$　④ $3\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

해설



그래프에서 사각형 OQPR 의

$\left(\text{가로의 길이} : x,\ \text{세로의 길이} : y = \dfrac{6}{x}\right)$

둘레는 $2(x+y) = 2\left(x + \dfrac{6}{x}\right) \geq$

$2 \cdot 2\sqrt{x \cdot \dfrac{6}{x}} = 4\sqrt{6}$

$\therefore$ 둘레의 최소값$= 4\sqrt{6}$

해설

사각형 OQPR 의

$\left(\text{가로의 길이} : x\text{세로의 길이} : y = \dfrac{6}{x}\right)$

$2(x+y)$ 의 최소값을 구하는 문제이다.

$2(x+y) = k$ 라 놓고

$y = \dfrac{6}{x}$ 의 관계식과 연립해서푼다.

$k = 2\left(x + \dfrac{6}{x}\right)$

이 식을 x에 대한 이차식으로 정리하면

$kx = 2x^2 + 12$, $2x^2 - kx + 12 = 0$

두 근의 합, 곱 모두 양,

실근을 가질 조건 $(D \geq 0)$ 을 이용

$D = k^2 - 96 \geq 0$

$\therefore k \geq \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$ $(\because k > 0)$