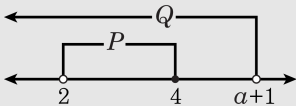


1. 두 조건  $p : 2 < x \leq 4, q : x < a + 1$ 에 대하여  $p$ 는  $q$ 이기 위한 충분조건 일 때, 실수  $a$ 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 :  $a > 3$

해설



$$p \rightarrow q \text{ 이므로 } a + 1 > 4 \Rightarrow a > 3$$

2. 두 명제  $p \rightarrow q$  와  $q \rightarrow r$  가 모두 참이면 명제  $p \rightarrow r$  도 참이 된다. 이 성질을 이용하여 다음을 구하여라.

네 조건  $p, q, r, s$  에 대하여  $p$ 는  $r$ 이기 위한 충분조건,  $q$ 는  $r$ 이기 위한 충분조건,  $s$ 는  $r$ 이기 위한 필요조건,  $q$ 는  $s$ 이기 위한 필요조건이다.

이 때,  $p$  는  $q$  이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.



답 :

조건



정답 : 충분조건

해설

$p \rightarrow r, q \rightarrow r, r \rightarrow s, s \rightarrow q$  가 참이다.  $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$   
이므로  $p \Rightarrow q$  이다.

$\therefore p$  는  $q$  이기 위한 충분조건이다.

3. 자연수  $n$ 에 대하여  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ 로 정의된다. 예를 들어,  $1! = 1$ ,  $2! = 2 \times 1$ ,  $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$  이다. 전체집합  $U = \{x \mid x = n! \text{ (} n, x \text{는 자연수)}\}$ 에서 두 조건  $p, q$ 가 각각  $p$  : 일의 자리가 0인수,  $q$  : 자리수가 네 자리 이상인 수 일 때, 조건 ' $p$  이고  $\sim q$ '를 만족하는 집합의 원소의 개수는?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개

### 해설

$$'p \text{ 이고 } \sim q' \Rightarrow P \cap Q^c = P - Q$$

i) 일의 자리가 0인 수 중 네자리 미만인 수의 일의 자리가 0이기 위해서는 인수로 2, 5를 가져야 한다.

$$5! = \underline{5} \times 4 \times 3 \times \underline{2} \times 1 = 120$$

$$\text{ii) } 6! = 6 \times \underline{5} \times 4 \times 3 \times \underline{2} \times 1 = 720$$

4. 실수  $x$ 에 대하여 두 조건  $p : a \leq x \leq 1$ ,  $q : x \geq -1$ 이 있다. 명제  $p \rightarrow q$ 를 참이 되게 하는 상수  $a$ 의 범위는?

①  $a > 1$

②  $a \leq 1$

③  $-1 \leq a \leq 1$

④  $a \geq -1$

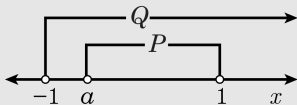
⑤  $a \leq -1$

### 해설

조건  $p, q$ 의 진리집합을 각각  $P, Q$ 라 하자.

(i)  $a > 1$ 일 때,  $P = \emptyset$ 이므로  $P \subset Q \therefore a > 1$

(ii)  $a \leq 1$ 일 때, 수직선에 나타내면



$$\therefore -1 \leq a \leq 1$$

(i), (ii)에서  $a \geq -1$

5. 다음 중 명제와 그 역이 모두 참인 것은?

①  $xy \geq 0$  이면  $x \geq 0$  또는  $y \geq 0$

②  $x + y \geq 0$  이면  $x \geq 0$  이고  $y \geq 0$

③  $x \geq y$  이면  $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$

④  $x \leq 2$  이면  $|x - 1| \leq |x - 3|$

⑤  $a > 0$  이고  $b > 0$  이면  $a^2 + b^2 > 0$

#### 해설

① 거짓 : (반례)  $x = -2, y = -1$  일 때,  
 $xy = 2 \geq 0$  이지만  $-2 < 0$  이고  $-1 < 0$  이다.

② 거짓 : (반례)  $x = -2, y = 3$  일 때,  
 $x + y = -2 + 3 \geq 0$  이지만  $-2 < 0$  이고  $3 > 0$  이다.

③ 거짓 : (반례)  $x = 2, y = -2$  일 때,  
 $2 \geq -2$  이지만  $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$  이다.

④  $|x - 1| \leq |x - 3|$  의 양변을 제곱하면  
 $x^2 - 2x + 1 \leq x^2 - 6x + 9$  에서  $x \leq 2$  이므로 원래의 명제와 그  
역이 모두 참이다.

⑤ 명제 ' $a > 0$  이고  $b > 0$  이면  $a^2 + b^2 > 0$ ' 은 참이지만, 그의  
역 ' $a^2 + b^2 > 0$  이면  $a > 0$  이고  $b > 0$ ' 은 거짓이다.

6. 다음은 명제 ‘정수  $x, y, z$ 에 대하여  $x^2 + y^2 = z^2$  이면  $x, y, z$  중 적어도 하나는 3의 배수이다.’가 참임을 대우를 이용하여 증명한 것이다. (가) ~ (마)에 들어갈 말로 틀린 것은?

주어진 명제의 대우인 ‘정수  $x, y, z$ 에 대하여  $x, y, z$ 가 모두 3의 배수가 아니면 (가)이다.’가 참임을 증명해 보자.

$x, y, z$ 가 모두 3의 배수가 아니면,

$x, y, z$ 는 각각  $x = 3l \pm 1, y = 3m \pm 1, z = 3n \pm 1$  ( $l, m, n$ 은 정수)로 나타낼 수 있다.

이때,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (3l \pm 1)^2 + (3m \pm 1)^2 \\ &= 9l^2 \pm 6l + 1 + 9m^2 \pm 6m + 1 \\ &= 9(l^2 + m^2) \pm 6(l + m) + 2 \end{aligned}$$

또는

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (\text{나}) \\ &= (\text{다}) \\ &= 9(l^2 + m^2) \pm 6(l - m) + 2 \end{aligned}$$

한편,

$$z^2 = (3n \pm 1)^2 = 9n^2 \pm 6n + 1$$

따라서,  $x^2 + y^2 \neq z^2$  이므로 주어진 명제의 대우는 (라)이다.

그러므로 주어진 명제 ‘ $x^2 + y^2 = z^2$  이면  $x, y, z$  중 적어도 하나는 3의 배수이다.’는 (마)이다.

① (가)  $x^2 + y^2 \neq z^2$

② (나)  $(3l \pm 1)^2 + (3m \pm 1)^2$

③ (다)  $9l^2 \pm 6l + 1 + 9m^2 \mp 6m + 1$

④ (라) 참

⑤ (마) 참

해설

$x^2 + y^2$ 는  $(3l \pm 1)^2 + (3m \pm 1)^2$  또는  $(3l \pm 1)^2 + (3m \mp 1)^2$

7. 학생 수가 50 명인 학급에서 생일을 조사하였을 때, 다음 중 항상 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ 5 명 이상의 생일이 있는 달이 있다.  
 ㉡ 모든 달에 생일이 있다.  
 ㉢ 8 명 이상의 생일이 있는 요일이 있다.  
 ㉣ 생일이 같은 학생이 존재한다.

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉢, ㉣

### 해설

㉠ 50 명의 생일이 12 달에 가장 골고루 퍼져 있을 때,  $50 = 12 \times 4 + 2$  이므로 매달 4 명씩 생일이 있고 나머지 2 명은 어느 달인가에 추가되어야 하므로, 5 명 이상의 생일이 있는 달이 반드시 존재한다.

㉡ 50 명 모두 특정한 달에는 생일이 있지 않을 수도 있으므로 거짓이다.

㉢ ㉠와 마찬가지로 생각해 보면, 50 명의 생일이 일곱 요일에 가장 골고루 퍼져 있을 때는  $50 = 7 \times 7 + 1$  이므로 어느 요일인가에 8 명의 생일이 있다. 따라서, 참이다.

㉣ 어느 특정한 날에 생일이 같은 학생은 존재할 수도 있고 존재하지 않을 수도 있다.

그러므로 위의 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣ 중에서 항상 맞는 것은 ㉠와 ㉢이다.

8. 다음 중  $p$  가  $q$  이기 위한 필요조건이나 충분조건은 아닌 것을 고르면?  
(단,  $n$  은 자연수,  $x, y, z$  는 실수)

①  $p : A \cup B = A, q : B - A = \phi$

②  $p : n^2$  은 12 의 배수이다.,  $q : n$  은 12 의 배수이다.

③  $p : xyz \neq 0, q : x, y, z$  는 모두 0 이 아니다.

④  $p : x^2 + y^2 + z^2 = 0, q : x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$

⑤  $p : |x + y + z| = |x| + |y| + |z|, q : xy + yz + zx > 0$

### 해설

①  $p : A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A \Leftrightarrow q : B - A = \phi \therefore$  필요충분조건

②  $p : n^2$  은 12의 배수이다.  $\leftarrow q : n$  은 12 의 배수이다. <반례>  
 $n$  이 6 이면  $n^2$  은 12 의 배수이나  $n$  은 12 의 배수가 아니다.  
 $\therefore$  필요조건

③  $p : xyz \neq 0 \rightarrow q : x, y, z$  는 모두 0 이 아니다.  $\therefore$  필요충분조건

④  $p : x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0, z = 0$   
 $q : x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \{ (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \} = 0 \Leftrightarrow x = y = z$   
 $p : x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Rightarrow q : x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$   
 $\therefore$  충분조건

⑤  $|x + y + z| = |x| + |y| + |z| \Rightarrow xy + yz + zx = 0$  <반례>  $x = 3, y = 5, z = -1$  을 대입하면  $q \rightarrow p$  가 성립하지 않는다.  $\therefore$  충분조건

9. 다음 중 거짓인 명제는? (단  $x, y, z, a, b$  는 실수이다.)

① 둘레의 길이가 일정한 직사각형 중에서 넓이가 최대인 것은 정사각형이다.

②  $xy + yz + zx = 1$  일 때,  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$

③  $a, b, c$  가 양수일 때,  $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$

④  $a \geq b \geq 0$  이면  $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a-b}$

⑤  $xy > x + y > 4$  이면  $x > 2, y > 2$

### 해설

①  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$  (단, 등호는  $a = b$  일 때 성립)

②  $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$

$$= \frac{1}{2} (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$$

③  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2, \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2, \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$

(단, 등호는  $a = b = c$  일 때 성립)

따라서  $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$

④  $(\sqrt{a-b})^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 2\sqrt{a}\sqrt{b} - 2b$   
 $= 2\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0$

⑤ <반례>  $x = \frac{3}{2}, y = 10$

또는  $x = \frac{5}{4}, y = 8$  등 여러 경우가 있다.

10.  $x$ 가 실수일 때,  $\frac{x^2 - x + 1}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2}$ 의 최댓값은?

①  $-\frac{3}{2}$

②  $-\frac{1}{2}$

③  $\frac{1}{2}$

④  $\frac{3}{2}$

⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} & x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 \\ &= x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 + 1 \\ &= x^2 \left( x^2 - 2x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) + 1 \\ &= x^2 \left\{ x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \left( x + \frac{1}{x} \right) + 3 \right\} + 1 \\ &= x^2 \left\{ \left( x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 \left( x + \frac{1}{x} \right) + 1 \right\} + 1 \end{aligned}$$

$$= x^2 \left( x + \frac{1}{x} - 1 \right)^2 + 1$$

$$= (x^2 - x + 1)^2 + 1$$

$$\therefore \text{준식} = \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 1)^2 + 1} \text{ 이고}$$

$$x^2 - x + 1 = \left( x^2 - x + \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{4}$$

$$= \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \text{ 이므로}$$

$$x^2 - x + 1 = t \text{로 치환 } t \geq \frac{3}{4} \text{ 하면}$$

$$\text{준식} : \frac{t}{t^2 + 1} = \frac{1}{\frac{t^2 + 1}{t}} = \frac{1}{t + \frac{1}{t}}$$

$$\text{여기서 } t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 2$$

$$(\because t \geq \frac{3}{4})$$

$$\text{따라서 } \frac{t^{-1} + 1}{t} \text{의 최솟값은 } 2 \text{ 이고}$$

$$\frac{t}{t^2 + 1} \text{의 최댓값은 } \frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

11. 공항에서 출국시에 통과되지 않은 물건을 소유하고 있을 때는 경고음이 울리게 되어 있다. 1건 적발될 때마다 출국 심사 시간은  $x$ 분씩 늘어나며  $y$ 명의 사람들이 심사를 받기 위해 줄을 서서 기다리고 있다. 기본 심사 시간은 한 사람 당 2분이며 10건이 적발되었다고 할 때, 1시간 이내에 심사를 마치기 위한  $xy$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

10건이 적발되었으므로 늘어난 심사 시간은  $10x$ ,  
 $y$ 명이 기다리고 있으므로 기본 심사 시간은  $2y$ 분이다.

시간이내에 심사를 끝내야 하므로

$$10x + 2y \leq 60 \cdots \textcircled{A}$$

$x > 0$ ,  $y > 0$ 이므로

산술평균, 기하평균에 의하여

$$10x + 2y \geq 2\sqrt{10x \cdot 2y}$$

$$10x + 2y \geq 2\sqrt{20xy} \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$ ,  $\textcircled{B}$ 에 의하여

$$2\sqrt{20xy} \leq 60, 20xy \leq 900$$

$$\therefore xy \leq 45$$

따라서  $xy$ 의 최댓값은 45이다.

12. 함수  $y = \frac{6}{x}$ 의 그래프 위의 한 점 P에서  $x$ 축과  $y$ 축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 할 때, 사각형 OQPR의 둘레의 길이의 최소값은?  
(단,  $x > 0$ , O는 원점)

①  $6\sqrt{2}$

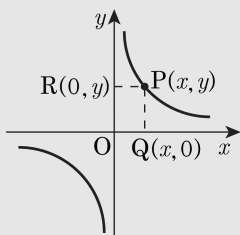
②  $4\sqrt{6}$

③  $2\sqrt{6}$

④  $3\sqrt{2}$

⑤  $\sqrt{3}$

해설



그래프에서 사각형 OQPR의

(가로의 길이 :  $x$ , 세로의 길이 :  $y = \frac{6}{x}$ )

둘레는  $2(x + y) = 2\left(x + \frac{6}{x}\right) \geq$

$$2 \cdot 2\sqrt{x \cdot \frac{6}{x}} = 4\sqrt{6}$$

$\therefore$  둘레의 최소값  $= 4\sqrt{6}$

해설

사각형 OQPR의

(가로의 길이 :  $x$  세로의 길이 :  $y = \frac{6}{x}$ )

$2(x + y)$ 의 최소값을 구하는 문제이다.

$2(x + y) = k$ 라 놓고

$y = \frac{6}{x}$ 의 관계식과 연립해서 푼다.

$$k = 2\left(x + \frac{6}{x}\right)$$

이 식을  $x$ 에 대한 이차식으로 정리하면

$$kx = 2x^2 + 12, 2x^2 - kx + 12 = 0$$

두 근의 합, 곱 모두 양,

실근을 가질 조건 ( $D \geq 0$ )을 이용

$$D = k^2 - 96 \geq 0$$

$$\therefore k \geq \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \quad (\because k > 0)$$