1. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $\{(A-B)\cup(A\cap B)\}\cap B = A$가 성립할 때, 다음 중 반드시 성립하는 것은?

① $A - B = \phi$　② $A \cap B = \varnothing$　③ $A^c \subset B^c$

④ $B^c \cup A = U$　⑤ $A^c \cap B = \phi$

해설

$\{(A-B)\cup(A\cap B)\}\cap B = \{(A\cap B^c)\cup(A\cap B)\}\cap B = \{A\cap(B^c\cup B)\}\cap B$

$= (A\cap U)\cap B = A\cap B = A \quad \therefore\ A\subset B \leftrightarrow A - B = \varnothing$

2. 우리 반 학생 중에서 여름을 좋아하는 학생이 20 명, 여름과 겨울을 모두 좋아하는 학생은 10 명, 여름 또는 겨울을 좋아하는 학생은 45 명이다. 겨울을 좋아하는 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ 답: ______ 명

▷ 정답: 35 명

해설

여름을 좋아하는 학생을 집합 A 라 하고, 겨울을 좋아하는 학생을 B 라고 하자.

그렇다면 여름과 겨울을 모두 좋아하는 학생은 $A \cap B$ 가 된다.

겨울을 좋아하는 학생, 즉 $n(B)$ 를 구하는 것이다.

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$45 = 20 + x - 10$

그러므로 x는 35이다.

3. 집합 $A=\{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $n(A)=0$ ② $0 \in A$ ③ $\{\varnothing\} \notin A$

④ $\varnothing \in A$ ⑤ $\{0\} \subset A$

해설

집합 A 의 원소는 $\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}$ 이므로

① $n(A)=3$

② $0 \notin A$

③ $\{\varnothing\} \in A$

⑤ $\{0\} \not\subset A$

4. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$ 일 때, 다음 중 $n(B)-n(A)$ 와 같은 값을 모두 고른 것은?

㉠ $n(A)-n(B)$	㉡ $n(B)$
㉢ $n(A)$	㉣ $n((A\cup B)-(A\cap B))$
㉤ $n(\{\varnothing\})$	

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉣

해설

$(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$ 이므로 $A-B=\varnothing$, $B-A=\varnothing$ 이다.
따라서 $A\subset B$, $B\subset A$ 이므로 $A=B$ 이다.
$\therefore\ n(A)=n(B)$
$n(B)-n(A)=0$ 이고
㉠ $n(A)-n(B)=0$
㉣ $n((A\cup B)-(A\cap B))=0$ 이다.

5. 두 자리 자연수 중 k의 배수인 것 전체의 집합을 $A_k(k=1,\ 2,\ 3,\ \dots)$라 할 때, 집합 $A_2 \cap (A_3 \cup A_4)$ 의 원소의 개수는?

① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

해설

$A_2 \cap (A_3 \cup A_4) = (A_2 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_4) = A_6 \cup A_4$

$10 \le 6n < 100$ 에서 $2 \le n \le 16$ $\therefore\ n(A_6) = 15$

$10 \le 4n < 100$ 에서 $3 \le n < 25$ $\therefore\ n(A_4) = 22$

$10 \le 12n < 100$ 에서 $1 \le n \le 8$ $\therefore\ n(A_{12}) = 8$

그러므로 $n(A_6 \cup A_4) = 15 + 22 - 8 = 29$

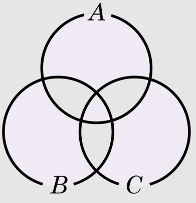
6. 임의의 두 집합 X, Y 에 대하여 연산 ◎을 $X \circledcirc Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$ 로 정의하자. 1에서 30까지의 자연수 중 2의 배수, 3의 배수, 5의 배수의 집합을 각각 A, B, C 라고 할 때, $(A \circledcirc B) \circledcirc C$ 의 원소의 개수는?

① 11개 ② 12개 ③ 13개 ④ 14개 ⑤ 15개

해설

$$\begin{aligned}(X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c) &= (X \cup Y) \cap (X \cap Y)^c \\ &= (X \cup Y) - (X \cap Y) \\ &= (X - Y) \cup (Y - X)\end{aligned}$$

이 정의로부터 $(A \circledcirc B) \circledcirc C$를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



이때, $A \cap B$는 6의 배수의 집합,
$B \cap C$는 15의 배수의 집합,
$C \cap A$는 10의 배수의 집합,
$A \cap B \cap C$는 30의 배수의 집합이므로
$n(A) = 15,\ n(B) = 10,\ n(C) = 6,$
$n(A \cap B) = 5,\ n(B \cap C) = 2,\ n(C \cap A) = 3,$
$n(A \cap B \cap C) = 1$

$$\begin{aligned}\therefore n\{(A \circledcirc B) \circledcirc C\} &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - 2\{n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)\} \\ &\quad + 4 \cdot n(A \cap B \cap C) \\ &= 15 + 10 + 6 - 2(5 + 2 + 3) + 4 \\ &= 15\end{aligned}$$

7. 집합 M을 $M=\{3a+5b|a,\ b$는 음이 아닌 정수$\}$로 정의할 때, 다음 중 옳은 것은?

㉠ $89 \in M, 97 \in M$
㉡ $K \in M \ \Rightarrow\ K+3 \in M$
㉢ 두 자리의 모든 자연수는 M 의 원소이다.

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉢

④ ㉠, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $89=9+80=3\times3+5\times16 \in M$

$97=27+70=3\times9+5\times14 \in M$

㉡ $3a+5b=K$ 라 하면

$K+3=3(a+1)+5b \in M$

㉢ $10=3\times0+5\times2$

$11=3\times2+5\times1$

$12=3\times4+5\times0$

$13=3\times1+5\times2$

$14=3\times3+5\times1$

이므로 15 이후의 자연수는 $10+5=15$, $11+5=16$, $12+5=17$, $13+5=18$, $14+5=19\cdots$ 의 꼴로 표현이 가능하다.

따라서 두 자리의 모든 자연수는 M의 원소이다.

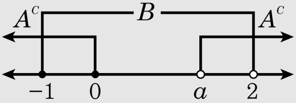
8. 실수 전체의 집합R의 두 부분집합 $A=\{x|0<x\le a\}$, $B=\{x|-1\le x<2\}$ 가 $A^c\cup B=R$를 만족할 때, a의 값의 범위를 구하면? (단, $A\neq\varnothing$)

① $0\le a<2$ ② $0<a\le 2$ ③ $0\le a\le 2$

④ $0<a<2$ ⑤ $-1\le a<5$

해설

$A\neq\varnothing$이므로, $a>0$ 또 $A^c=\{x|x\le 0$ 또는 $x>a\}$



위의 그림에서 $A^c\cup B=R$가 되려면, $0<a<2$

해설

$A^c\cup B=R\leftrightarrow A\subset B$ 임을 이용하여 구할 수 있다.

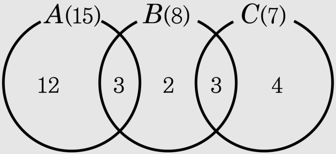
9. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $n(A)=15$, $n(B)=8$, $n(C)=7$, $n(A\cap B)=3$, $A\cap C=\varnothing$, $n(B\cap\ C)=3$ 일 때, $n(A\cup B\cup C)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore\ n(A\cup B\cup C)=24$

10. 전체집합 $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 두 부분집합 $A,\ B$에 대하여 $A = \{1,\ 3,\ 5\}$이고 $A \cap B \neq \varnothing$일 때, 집합 B의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 28 개

해설

$A \cap B \neq \varnothing$이므로 집합 B는 적어도 A의 원소를 한 개 이상 가지고 있는 전체집합의 부분집합이므로

(집합 B의 갯수)

= (U의 부분집합의 갯수) −

(A의 원소를 포함하지 않는 U의 부분집합의 갯수) $= 2^5 - 2^{5-3}$

$= 2^5 - 2^2$

$= 32 - 4 = 28$(개)

11. 두 집합 $A=\{3, a+3, 2a+3\}$, $B=\{5, a+4, 4a+3\}$ 에 대하여 $A-B=\{3,7\}$ 일 때, a 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$A=\{3, a+3, 2a+3\}$, $B=\{5, a+4, 4a+3\}$ 이고,
$A-B=\{3,7\}$ 이므로 집합 A 는 반드시 원소 7 을 가진다.
(1) $a+3=7$ 일 때, $a=4$ 이고, $A=\{3,7,11\}$, $B=\{5,8,19\}$ 이다.
이때 $A-B \neq \{3,\ 7\}$ 이므로 성립할 수 없다.
(2) $2a+3=7$ 일 때, $a=2$ 이고, $A=\{3,5,7\}$, $B=\{5,6,11\}$ 이다.
이때 $A-B=\{3,7\}$ 이므로 성립된다.
$\therefore a=2$

12. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A^c \cap B^c) = 0$ 이고, $A \cap B = \{3\}$, $(A \cup B^c) - (A^c \cup B) = \{1, 4, 5, 6\}$ 일 때, $n(A) + n(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned}(A \cup B^c) - (A^c \cup B) &= (A \cup B^c) \cap (A \cap B^c) \\ &= (A \cap B^c) \\ &= \{1, 4, 5, 6\}\end{aligned}$$

따라서, $A \cap B = \{3\}$ 이므로

$A = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ 이고, $n(A^c \cap B^c) = 0$ 이므로 $B = \{2, 3, 7\}$

$n(A) + n(B) = 5 + 3 = 8$