1. 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점을 M이라하자. 두 점 $\mathrm{A, C}$의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(-2,6), \mathrm{C}(4,0)$이고, 삼각형 MBC의 무게중심은 원점이다. 점 D의 좌표를 (a,b)라고 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

점 M은 선분 AC의 중점이므로

M의 좌표는 $\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (1,3)$.

삼각형 MBC의 무게중심은 원점이므로

점 B의 좌표를 (c,d)라고 하면

$\frac{1+c+4}{3} = 0$에서 $c = -5$

$\frac{3+d+0}{3} = 0$에서 $d = -3$

따라서 점 B의 좌표는 $(-5,-3)$이다. 점 M은 선분 BD의 중점이므로

$\frac{-5+a}{2} = 1$에서 $a = 7$

$\frac{-3+b}{2} = 3$ 에서 $b = 9$

$\therefore a+b = 16$

2. 원점 $O(0,\ 0)$ 에서 직선 $(k+1)x+(k+2)y+3=0$ 에 내린 수선의 길이가 최대일 때, 그 길이는? (단, k 는 상수)

① 2　　② 3　　③ $2\sqrt{2}$　　④ $2\sqrt{3}$　　⑤ $3\sqrt{2}$

해설

원점과 직선 사이의 거리를 d 라 하면

$$d=\frac{|3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k+2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2k^2+6k+5}}$$

$$\leq \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=3\sqrt{2}$$

$(\because\ \sqrt{2k^2+6k+5}$

$$=\sqrt{2\left(k+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\geq\sqrt{\frac{1}{2}})$$

3. 다음은 서로 다른 세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이 S가 $S = \frac{1}{2}|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2)|$임을 보이는 과정이다.

> 선분 AB의 길이
> $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$이고, 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기가 $\boxed{(가)}$이므로, 직선의 방정식은
> $y - y_1 = \boxed{(가)}(x - x_1) \cdots$ ㉠
> 이 때, 점 C와 직선 ㉠사이의 거리 d는
> $d = \dfrac{|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1}{\boxed{(나)}}$
> $\dfrac{+x_3y_2)|}{\boxed{(나)}}$
> 따라서 삼각형 ABC의 넓이 S는
> $S = \frac{1}{2}|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2)|$이다.

이 과정에서 (가), (나)에 들어갈 내용을 바르게 짝지은 것은?

(가) (나)

① $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $\sqrt{(x_1 - y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2}$
② $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $\sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}$
③ $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
④ $\dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$, $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
⑤ $\dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$, $\sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}$

해설

(가) $\dfrac{(y\text{의 증가량})}{(x\text{의 증가량})} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

(나) 점 $(x_1,\ y_1)$에서 직선 $ax + by + c = 0$사이의 거리 d는 $d = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$임을 이용하면 $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$이다.

4. 좌표평면 위의 두 점 A(4, 3), B(1, 3)이 있다. 점 A에서 x축 위의 점과 y축 위의 점을 각각 지나 점 B에 이르는 최단 거리는?

① 5 ② 7 ③ $\sqrt{53}$ ④ $\sqrt{61}$ ⑤ $\sqrt{75}$

해설

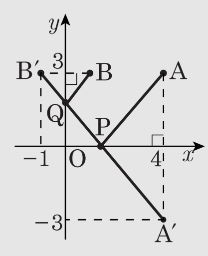
점 A의 x축에 대한 대칭점을 A′, 점 B의 y축에 대한 대칭점을 B′

두 점 A′, B′을 지나는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 P, Q 라고 하면

$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{A'P}}$, $\overline{\mathrm{BQ}} = \overline{\mathrm{B'Q}}$

주어진 조건을 만족하는 최단 거리는 두 점 A′(4, −3), B′(−1, 3) 사이의 거리이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{A'B'}} = \sqrt{(4+1)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{61}$



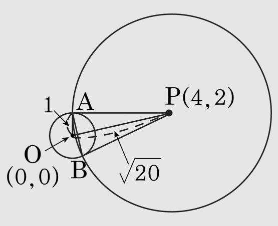
5. 점 (4, 2) 에서 원 $x^2+y^2=1$ 에 그은 접선의 접점을 A, B 라 할 때 직선 $\overline{AB}$ 의 방정식을 구하면?

① $4x+y=1$　② $2x+y=1$　③ $4x+2y=1$

④ $2x-y=1$　⑤ $4x-y=1$

해설

$\overline{AB}$ 는 원 $x^2+y^2=1$ 와 중심이 P(4, 2) 이고 반지름이 $\overline{PA}$ 인 원의 공통현이다. 다음 그림에서 $\overline{PA}=\sqrt{19}$ 이므로



원 P 의 식은 $(x-4)^2+(y-2)^2=19$

$x^2+y^2=1 \cdots ①$

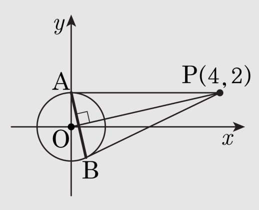
$(x-4)^2+(y-2)^2=19 \cdots ②$

공통현 $\overline{AB}$ 의 식은 ① − ② 하면

$8x+4y=2$, $\therefore\ 4x+2y=1$

해설

점 P(4, 2) 에서 원의 중심 O 을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.



또한 직선 $\overline{AB}$ 는 $\overline{OP}$ 에 수직이므로 직선 $\overline{AB}$ 의 기울기는 -2 이다.

따라서 직선 $\overline{AB}$ 의 방정식은 $y=-2x+b$ 라 하고, A 의 좌표를 (m, n) 이라 하면

$n=-2m+b \ \rightarrow\ n+2m=b \cdots ①$

또한, 접선의 방정식은 $mx+ny=1$ 이고 (4, 2) 를 지나므로

$4m+2n=1 \cdots ②$

①, ② 에서 $b=\frac{1}{2}$ 이다.

$\therefore$ $\overline{AB}$ 의 직선의 방정식은

$y=-2x+\frac{1}{2} \ \rightarrow\ 4x+2y=1$

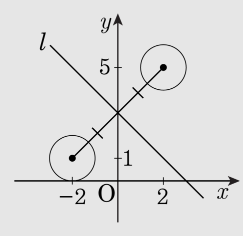
6. 두 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=1$, $(x-2)^2+(y-5)^2=1$ 은 직선 l 에 대하여 서로 대칭이다. 직선 l 의 방정식은?

① $y=-2x+3$ ② $y=-x+2$ ③ $y=x+3$

④ $y=-x+3$ ⑤ $y=2x-1$

해설

두 원의 중심 $(-2,\ 1)$, $(2,\ 5)$ 는 직선 l 에 대하여 대칭이므로 직선 l 은 두 원의 중심을 연결한 선분의 수직이등분선이다.



따라서 직선l 의 방정식을 $y=ax+b$ 라 하면

ⅰ) 두 원의 중심을 지나는 직선의 기울기가

$\dfrac{5-1}{2-(-2)}=1$ 이므로

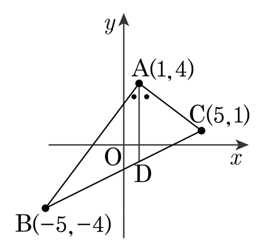
$a=-1$

ⅱ) 두 원의 중심을 연결한 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+2}{2}, \dfrac{5+1}{2}\right)$ 에서 $(0,3)$ 이므로 $b=3$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-x+3$ 이다.

7. 다음 그림과 같이 세점 $A(1,4)$, $B(-5,-4)$, $C(5,1)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?



① $1:1$ ② $\sqrt{2}:1$ ③ $\sqrt{3}:1$

④ $2:1$ ⑤ $\sqrt{5}:1$

해설

두 삼각형의 넓이비는 $\overline{BD}:\overline{CD}$ 이고

각의 이등분선정리에 의해

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$

$\overline{AB}=\sqrt{(1+5)^2+(4+4)^2}=\sqrt{100}=10$

$\overline{AC}=\sqrt{(1-5)^2+(4-1)^2}=\sqrt{25}=5$

$\therefore\ \triangle ABC : \triangle ACD = 2 : 1$

8. 두 점 A$(-1,\ 3)$, B$(3,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하면?

① 4　② $\sqrt{5}$　③ $2\sqrt{5}$　④ $3\sqrt{5}$　⑤ $4\sqrt{5}$

해설

P$(a,\ 0)$이라하면, $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$

$(a+1)^2 + 3^2 = (a-3)^2 + 5^2$, $8a = 24$

$\therefore\ a = 3$

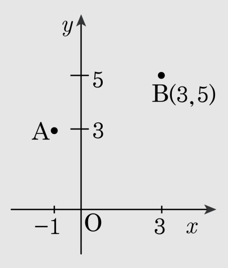
Q$(0,\ b)$이라 하면, $\overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{BQ}}$

$1^2 + (b-3)^2 = (-3)^2 + (b-5)^2$

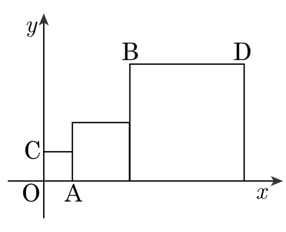
$\therefore\ 4b = 24$

$\therefore\ b = 6$ P$(3,\ 0)$, Q$(0,\ 6)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{3^2+6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$



9. 좌표평면 위에 다음의 그림과 같이 세 개의 정사각형이 있다. 점 $C(0, 4)$, 점 $D(21, 12)$ 일 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하면?



① 11　② 13　③ 15

④ 17　⑤ 21

해설

가장 작은 정사각형의 한 변의 길이가 4 이므로
점 $A(4,\ 0)$ 가장 큰 정사각형의 한 변의 길이가 12 이므로
점 $B(21-12,\ 12)$
즉, $B(9,\ 12)$
$\therefore\ \overline{AB} = \sqrt{(9-4)^2+12^2} = 13$

10. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(-2,\ 2)$가 있다. 이 0때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}$의 최솟값은?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 3

해설

원점을 $\mathrm{O}(0,\ 0)$이라 하면

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}$

$=\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$이므로

이 값이 최소가 되는 것은 세 점 O, A, B가 일직선 위에 있을 때이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$의 최소값은

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$