

1.  $x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 4a^2 + 2a - 4 = 0$ 이 나타내는 자취의 최소 면적은 ?

- ①  $2\pi$     ②  $3\pi$     ③  $4\pi$     ④  $5\pi$     ⑤  $6\pi$

해설

$$\text{준식} = x^2 + 2ax + y^2 - 4ay + 4a^2 + 2a - 4 = 0$$

$$\rightarrow (x+a)^2 + (y-2a)^2 = a^2 - 2a + 4$$

그러므로 준식은 중심  $(-a, 2a)$  이고

반지름이  $\sqrt{a^2 - 2a + 4}$  이다.

$$\therefore \text{면적 } S = \pi(\sqrt{a^2 - 2a + 4})^2$$

$$= \pi(a^2 - 2a + 4) = \pi(a-1)^2 + 3\pi$$

$\therefore a = 1$  일 때 최소 면적 :  $3\pi$

2. 원  $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$  에 의하여 잘리는  $x$  축 위의 선분의 길이를 구하면?

- ① 0.5      ② 1.0      ③ 1.5      ④ 2.0      ⑤ 2.5

**해설**

원의 방정식을 정리하면,  $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 2$   
이 원이  $x$  축과 만나는 점은  $y=0$  을 대입하여 구할 수 있다.  
 $\Rightarrow (x+2)^2 + 1 = 2$   
 $\Rightarrow x = -1, -3$   
 $\therefore x$  축 위의 선분의 길이는 2

3. 두 점 A(-4, 2), B(2, -1)로 부터의 거리의 비가 2 : 1 인 점이 나타내는 원의 중심과 직선  $y = 3x - 4$  의 거리는?

- ①  $\sqrt{2}$     ② 2    ③  $\sqrt{6}$     ④  $2\sqrt{2}$     ⑤  $\sqrt{10}$

해설

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$$

$$2\overline{BP} = \overline{AP}$$

$$4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$$

$$4 \cdot \{(x-2)^2 + (y+1)^2\} = (x+4)^2 + (y-2)^2$$

$$3x^2 + 3y^2 - 24x + 12y = 0$$

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 20$$

원의 중심 (4, -2)와 직선  $3x - y - 4 = 0$  간의 거리

$$\therefore \frac{|12 + 2 - 4|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

4. 원  $x^2 + y^2 = 5$  와 점  $P(x_1, y_1)$  에서 접하는 직선이  $x$  축,  $y$  축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때,  $\triangle OAB$  의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, P 는 제1 사분면 위의 점이고, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x_1 y_1 > 0$  이고 넓이는  $\frac{25}{2x_1 y_1}$  이므로

$x_1 y_1$  이 최대가 될 때 넓이는 최소가 된다.

그런데  $x_1^2 + y_1^2 = 5$  이고  $x_1 > 0, y_1 > 0$  이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot y_1^2} = x_1 y_1, x_1 y_1 \leq \frac{5}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{x_1 y_1} \geq \frac{2}{5}$$

$$\therefore \frac{25}{2x_1 y_1} \geq \frac{25}{2} \cdot \frac{2}{5} = 5 \text{ (단, 등호는 } x_1 = y_1 \text{ 일 때 성립)}$$

따라서, 구하는 넓이의 최솟값은 5

5. 원  $x^2 + y^2 = 1$  밖의 점  $P(3, 4)$ 에서 이 원에 두 개의 접선을 그을 때 그 접점을  $Q, R$ 이라고 하자. 직선  $QR$ 의 방정식을  $ax + by = 1$ 라 할 때  $a + b$ 를 구하여라.

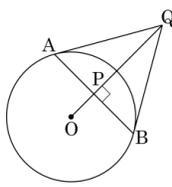
▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

접점의 좌표를  $Q(x_1, y_1), R(x_2, y_2)$ 라고 하면  
 $Q, R$ 에서의 접선의 방정식은 각각  
 $x_1x + y_1y = 1, x_2x + y_2y = 1$ 이고,  
두 접선은 모두 점  $P(3, 4)$ 를 지나므로  
 $3x_1 + 4y_1 = 1, 3x_2 + 4y_2 = 1$   
여기서  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 는  
방정식  $3x + 4y = 1$ 의 근이며, 이 두 접점을  
지나는 직선은 오직 하나뿐이므로  
직선  $QR$ 의 방정식은  $3x + 4y = 1$ 이다.  
 $\therefore a = 3, b = 4 \quad \therefore a + b = 7$

6. 반지름의 길이가 10 인 원 O 의 내부에 한 점 P 가 있다. 점 P 를 지나고 직선 OP 에 수직인 직선이 원과 만나는 두 점을 A, B 라 하고, A, B 에서의 두 접선의 교점을 Q 라 하자.  $\overline{OP} = 5$  일 때, 선분 PQ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\triangle OAP$  에서  $\overline{OA} = 10$ ,  $\overline{OP} = 5$  이고  $\angle OPA = 90^\circ$  이므로 피타고라스의 정리에 의해

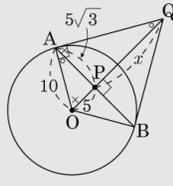
$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2} \\ &= \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

또한,  $\angle AOP = \angle QAP$  이고  $\angle OAP = \angle AQP$  이므로

$\triangle OAP$  와  $\triangle AQP$  는 닮은 꼴이 된다.

$$\therefore \overline{OP} : \overline{AP} = \overline{AP} : \overline{PQ}$$

$$\therefore \overline{PQ} = \frac{\overline{AP}^2}{\overline{OP}} = \frac{75}{5} = 15$$



7. 두 점  $A(-5, -2)$ ,  $B(2, 5)$  에 대하여 원  $x^2 + y^2 = 9$  위를 움직이는 점을  $P$  라고 할 때,  $\triangle ABP$  의 무게중심  $G$  는 중심이  $(a, b)$  이고 반지름이  $c$  인 원 위를 움직이게 된다. 이 때,  $a + b + c$  의 값을 구하면?

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ -1      ⑤ 0

해설

$P = (\alpha, \beta)$  라 하면,

$$G = \left( \frac{-5+2+\alpha}{3}, \frac{-2+5+\beta}{3} \right)$$

$$= \left( -1 + \frac{\alpha}{3}, 1 + \frac{\beta}{3} \right)$$

$-1 + \frac{\alpha}{3} = p$ ,  $1 + \frac{\beta}{3} = q$  라 하면,

$\alpha = 3p + 3$ ,  $\beta = 3q - 3$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 = 9$  이므로

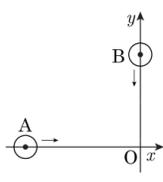
$$\therefore (3p + 3)^2 + (3q - 3)^2 = 9$$

$$\Rightarrow (p + 1)^2 + (q - 1)^2 = 1$$

$\Rightarrow$  중심이  $(-1, 1)$  이고, 반지름이 1 인 원

$$\therefore a + b + c = 1$$

8. 반지름이 1 인 두 원 A, B 가 현재 아래 그림의 위치에 있고, A 의 중심  $(-10, 0)$  은  $x$  축 위를 왼쪽에서 오른쪽으로, B 의 중심  $(0, 8)$  은  $y$  축 위를 위에서 아래로 매초 1 의 속도로 움직일 때, 원 A, B 가 최초로 접할 때와 두 번째 접할 때 각각의 시간은?

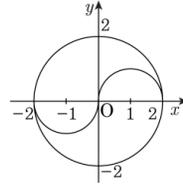


- ①  $t = 2, 4$       ②  $t = 4, 6$       ③  $t = 8, 10$   
 ④  $t = 12, 14$       ⑤  $t = 16, 18$

**해설**

$t$  초 후 A  $(-10+t, 0)$ , B  $(0, 8-t)$  에 위치.  
 $t$  초 후의 두 원의 중심 사이의 거리를  $d$  라 하면  
 $d^2 = (8-t)^2 + (10-t)^2 = 2t^2 - 36t + 164$   
 접하는 경우는 두 원의 중심 사이의 거리가  
 두 원의 반지름의 합과 같을 때이므로,  
 $\sqrt{(8-t)^2 + (10-t)^2} = \sqrt{2t^2 - 36t + 164} = 2$   
 $\therefore 2t^2 - 36t + 160 = 0$   
 $\therefore t^2 - 18t + 80 = 0$   
 $\therefore t = 8, 10$

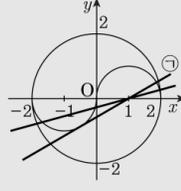
9. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 원과 반원으로 이루어진 태극문양이 있다. 태극문양과 직선  $y = a(x - 1)$ 이 서로 다른 다섯 점에서 만나도록 하는 실수  $a$ 의 값의 범위는?



- ①  $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{3}$       ②  $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$   
 ③  $0 < a < \frac{2}{3}$       ④  $0 < a < \frac{\sqrt{5}}{3}$   
 ⑤  $0 < a < \frac{\sqrt{6}}{3}$

**해설**

직선  $y = a(x - 1)$ 의 그래프는 실수  $a$ 의 값에 관계없이 항상 점  $(1, 0)$ 을 지나므로 직선이 태극문양과 서로 다른 다섯 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같이  $x$ 축과 직선 ㉠사이를 움직이는 직선일 때이다.



이때, 직선의 기울기는 양수이므로  $a > 0$  직선과 제3사분면의 반원이 접하는 경우, 점  $(-1, 0)$ 과 직선  $y = a(x - 1)$ , 즉  $ax - y - a = 0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|-a - 0 - a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1, |2a| = \sqrt{a^2 + 1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$4a^2 = a^2 + 1, a^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

그런데  $a > 0$ 이므로  $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서, 직선과 태극문양이 서로 다른 다섯 점에서 만나기 위한 실수  $a$ 의 값의 범위는

$$0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3} \text{이다.}$$

10. 두 점  $A(-4, 0)$ ,  $B(2, 0)$  으로부터의 거리의 비가  $2:1$  인 점이 나타내는 도형 위에 점  $P$  가 존재한다.  $\triangle ABP$  의 넓이의 최대값은?

- ① 8      ② 10      ③ 12      ④ 14      ⑤ 16

해설

점  $P$  의 자취는  $\overline{AB}$  를  $2:1$  로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양끝으로 하는 원의 자취이다.

$$\text{내분점 : } \left( \frac{2 \times 2 + 1 \times (-4)}{2 + 1}, 0 \right) = (0, 0)$$

$$\text{외분점 : } \left( \frac{2 \times 2 - 1 \times (-4)}{2 - 1}, 0 \right) = (8, 0)$$

$\Rightarrow$  중심이  $(4, 0)$  이고 반지름이 4인 원이다.

$$\Rightarrow (x - 4)^2 + y^2 = 16$$

$\therefore \triangle ABP$  가 최대가 되는 점은 삼각형의 높이가 최대가 되는 점

즉,  $(4, 4)$  또는  $(4, -4)$

$$\text{이때의 } \triangle ABP \text{ 의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$$

11. 중심이 직선  $2x+y=0$  위에 있고, 두 점  $(3, 0)$ ,  $(0, 1)$  을 지나는 원의 방정식은 ?

- ①  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$
- ②  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$
- ③  $5x^2 + 5y^2 - 8x + 16y - 21 = 0$
- ④  $5x^2 + 5y^2 + 8x - 16y - 21 = 0$
- ⑤  $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 12 = 0$

**해설**

구하는 원의 중심이 직선  $2x + y = 0$  위에 있으므로 중심을  $(a, -2a)$  라 할 수 있다.

$$(x-a)^2 + (y+2a)^2 = r^2$$

점  $(3, 0)$  을 지나므로,

$$(3-a)^2 + (2a)^2 = r^2 \dots \text{①}$$

또, 점  $(0, 1)$  을 지나므로,

$$a^2 + (1+2a)^2 = r^2 \dots \text{②}$$

$$\text{①, ②에서 } a = \frac{4}{5}, r^2 = \frac{37}{5}$$

$$\therefore \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{5}\right)^2 = \frac{37}{5}$$

$$\text{정리하면 } 5x^2 + 5y^2 - 8x + 16y - 21 = 0$$

12. 제1 사분면에서  $x$  축과  $y$  축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가  $r$  인 원의 중심을  $C_1$ , 제2 사분면에서  $x$  축과  $y$  축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가  $\frac{1}{2}r$  인 원의 중심을  $C_2$ , 제3 사분면에서  $x$  축과  $y$  축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가  $\frac{1}{4}r$  인 원의 중심을  $C_3$ , 제4 사분면에서  $x$  축과  $y$  축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가  $\frac{1}{8}r$  인 원의 중심을  $C_4$  라 하자.

$$\overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} = 14\sqrt{10} \text{ 일 때, } r \text{ 의 값을 구하여라.}$$

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$$\begin{aligned} & C_1(r, r), C_2\left(-\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r\right), \\ & C_3\left(-\frac{1}{4}r, -\frac{1}{4}r\right), C_4\left(\frac{1}{8}r, -\frac{1}{8}r\right) \text{ 이므로} \\ & \overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}r\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}r\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}r\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}r\right)^2} \\ & \quad + \sqrt{\left(\frac{3}{8}r\right)^2 + \left(\frac{1}{8}r\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2}r + \frac{\sqrt{10}}{4}r + \frac{\sqrt{10}}{8}r \\ &= \frac{7\sqrt{10}}{8}r = 14\sqrt{10} \\ &\therefore r = 16 \end{aligned}$$