1. $x^2+y^2+2ax-4ay+4a^2+2a-4=0$이 나타내는 자취의 최소 면적은 ?

① 2π ② 3π ③ 4π ④ 5π ⑤ 6π

해설

준식 $= x^2+2ax+y^2-4ay+4a^2+2a-4=0$

$\rightarrow (x+a)^2+(y-2a)^2=a^2-2a+4$

그러므로 준식은 중심 $(-a,\ 2a)$ 이고

반지름이 $\sqrt{a^2-2a+4}$ 이다.

$\therefore$ 면적 $S=\pi(\sqrt{a^2-2a+4})^2$

$=\pi(a^2-2a+4)=\pi(a-1)^2+3\pi$

$\therefore$ $a=1$ 일 때 최소 면적 : 3π

2. 원 $x^2+y^2+4x-2y+3=0$ 에 의하여 잘리는 x 축 위의 선분의 길이를 구하면?

① 0.5 ② 1.0 ③ 1.5 ④ 2.0 ⑤ 2.5

해설

원의 방정식을 정리하면, $(x+2)^2+(y-1)^2=2$
이 원이 x 축과 만나는 점은 $y=0$ 을 대입하여 구할 수 있다.
$\Rightarrow \quad (x+2)^2+1=2$
$\Rightarrow \quad x=-1,\ -3$
$\therefore \quad x$ 축 위의 선분의 길이는 2

3. 두 점 $A(-4,\ 2)$, $B(2,\ -1)$로 부터의 거리의 비가 $2:1$인 점이 나타내는 원의 중심과 직선 $y=3x-4$의 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$

$2\overline{BP}=\overline{AP}$

$4\overline{BP}^2=\overline{AP}^2$

$4\cdot\left\{(x-2)^2+(y+1)^2\right\}=(x+4)^2+(y-2)^2$

$3x^2+3y^2-24x+12y=0$

$(x-4)^2+(y+2)^2=20$

원의 중심 $(4,\ -2)$와 직선 $3x-y-4=0$ 간의 거리

$\therefore\ \dfrac{|12+2-4|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

4. 원 $x^2+y^2=5$ 와 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ 에서 접하는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, $\triangle\mathrm{OAB}$ 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, P 는 제1 사분면 위의 점이고, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x_1y_1 > 0$ 이고 넓이는 $\dfrac{25}{2x_1y_1}$ 이므로

x_1y_1 이 최대가 될 때 넓이는 최소가 된다.

그런데 $x_1^2+y_1^2=5$ 이고 $x_1>0, y_1>0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\dfrac{x_1^2+y_1^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot y_1^2} = x_1y_1,\ x_1y_1 \leq \dfrac{5}{2}$

$\therefore \dfrac{1}{x_1y_1} \geq \dfrac{2}{5}$

$\therefore \dfrac{25}{2x_1y_1} \geq \dfrac{25}{2} \cdot \dfrac{2}{5} = 5$ (단, 등호는 $x_1=y_1$ 일 때 성립)

따라서, 구하는 넓이의 최솟값은 5

5. 원 $x^2+y^2=1$ 밖의 점 $\mathrm{P}(3,\ 4)$에서 이 원에 두 개의 접선을 그을 때 그 접점을 Q, R이라고 하자. 직선 QR의 방정식을 $ax+by=1$라 할 때 $a+b$를 구하여라.

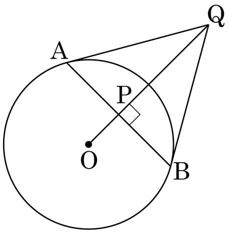
▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

접점의 좌표를 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{R}(x_2,\ y_2)$라고 하면
Q, R에서의 접선의 방정식은 각각
$x_1x+y_1y=1$, $x_2x+y_2y=1$이고,
두 접선은 모두 점 $\mathrm{P}(3,\ 4)$를 지나므로
$3x_1+4y_1=1$, $3x_2+4y_2=1$
여기서 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$는
방정식 $3x+4y=1$의 근이며, 이 두 접점을
지나는 직선은 오직 하나뿐이므로
직선 QR의 방정식은 $3x+4y=1$이다.
$\therefore\ a=3,\ b=4\quad\therefore\ a+b=7$

6. 반지름의 길이가 10 인 원 O 의 내부에 한 점 P 가 있다. 점 P 를 지나고 직선 OP 에 수직인 직선이 원과 만나는 두 점을 A, B 라 하고, A, B 에서의 두 접선의 교점을 Q 라 하자. $\overline{OP} = 5$ 일 때, 선분 PQ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\triangle OAP$ 에서 $\overline{OA} = 10$, $\overline{OP} = 5$ 이고 $\angle OPA = 90°$ 이므로 피타고라스의 정리에 의해

$\overline{AP} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2}$

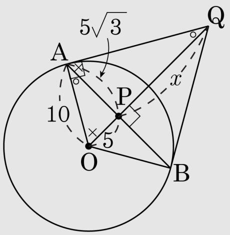
$= \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$ 이다.

또한, $\angle AOP = \angle QAP$ 이고 $\angle OAP = \angle AQP$ 이므로

$\triangle OAP$ 와 $\triangle AQP$ 는 닮은 꼴이 된다.

$\therefore\ \overline{OP} : \overline{AP} = \overline{AP} : \overline{PQ}$

$\therefore\ \overline{PQ} = \dfrac{\overline{AP}^2}{\overline{OP}} = \dfrac{75}{5} = 15$



7. 두 점 $\mathrm{A}(-5,\ -2)$, $\mathrm{B}(2,\ 5)$ 에 대하여 원 $x^2+y^2=9$ 위를 움직이는 점을 P 라고 할 때, $\triangle\mathrm{ABP}$ 의 무게중심 G 는 중심이 $(a,\ b)$ 이고 반지름이 c 인 원 위를 움직이게 된다. 이 때, $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ -1　　⑤ 0

해설

$\mathrm{P}=(\alpha,\ \beta)$ 라 하면,

$$\mathrm{G}=\left(\frac{-5+2+\alpha}{3},\ \frac{-2+5+\beta}{3}\right)$$

$$=\left(-1+\frac{\alpha}{3},\ 1+\frac{\beta}{3}\right)$$

$-1+\dfrac{\alpha}{3}=p$, $1+\dfrac{\beta}{3}=q$ 라 하면,

$\alpha=3p+3$, $\beta=3q-3$, $\alpha^2+\beta^2=9$ 이므로

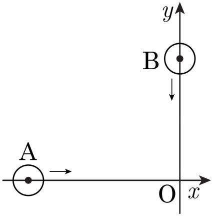
$\therefore\ (3p+3)^2+(3q-3)^2=9$

$\Rightarrow\ (p+1)^2+(q-1)^2=1$

$\Rightarrow$ 중심이 $(-1,\ 1)$ 이고, 반지름이 1 인 원

$\therefore\ a+b+c=1$

8. 반지름이 1 인 두 원 A, B 가 현재 아래 그림의 위치에 있고, A 의 중심 $(-10,\ 0\ )$은 x 축 위를 왼쪽에서 오른쪽으로, B 의 중심 $(0,\ 8\ )$은 y 축 위를 위에서 아래로 매초 1 의 속도로 움직일 때, 원 A, B 가 최초로 접할 때와 두 번째 접할 때 각각의 시간은?



① $t = 2,\ 4$ ② $t = 4,\ 6$ ③ $t = 8,\ 10$

④ $t = 12,\ 14$ ⑤ $t = 16,\ 18$

해설

t초 후 $A(-10+t,\ 0)$, $B(0,\ 8-t)$에 위치.

t 초 후의 두 원의 중심 사이의 거리를 d 라 하면

$d^2 = (8-t)^2 + (10-t)^2 = 2t^2 - 36t + 164$

접하는 경우는 두 원의 중심 사이의 거리가

두 원의 반지름의 합과 같을 때이므로,

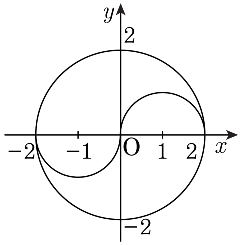
$\sqrt{(8-t)^2 + (10-t)^2} = \sqrt{2t^2 - 36t + 164} = 2$

$\therefore\ 2t^2 - 36t + 160 = 0$

$\therefore\ t^2 - 18t + 80 = 0$

$\therefore\ t = 8,\ 10$

9. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 원과 반원으로 이루어진 태극문양이 있다. 태극문양과 직선 $y = a(x-1)$이 서로 다른 다섯 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위는?



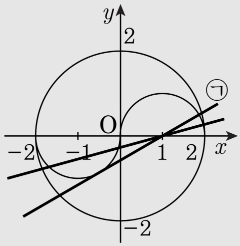
① $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$

③ $0 < a < \frac{2}{3}$ ④ $0 < a < \frac{\sqrt{5}}{3}$

⑤ $0 < a < \frac{\sqrt{6}}{3}$

해설

직선 $y = a(x-1)$의 그래프는 실수 a의 값에
관계없이 항상 점 $(1, 0)$을 지나므로
직선이 태극문양과 서로 다른 다섯 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같이 x축과 직선 ㉠사이를 움직이는 직선일 때이다.



이때, 직선의 기울기는 양수이므로 $a > 0$
직선과 제3사분면의 반원이 접하는 경우,
점 $(-1, 0)$과 직선 $y = a(x-1)$,
즉 $ax-y-a = 0$사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$\frac{|-a-0-a|}{\sqrt{a^2+1}} = 1, |2a| = \sqrt{a^2+1}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4a^2 = a^2+1, a^2 = \frac{1}{3}$

$\therefore a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

그런데 $a > 0$이므로 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서, 직선과 태극문양이 서로 다른 다섯 점에서 만나기 위한 실수 a의 값의 범위는

$0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

10. 두 점 A(−4, 0), B(2, 0) 으로부터의 거리의 비가 2 : 1 인 점이 나타내는 도형 위에 점 P 가 존재한다. △ABP 의 넓이의 최대값은?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

해설

점 P 의 자취는 $\overline{\text{AB}}$ 를 2 : 1로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양끝으로 하는 원의 자취이다.

내분점 : $\left(\frac{2\times2+1\times(-4)}{2+1},\ 0\right)=(0,0)$

외분점 : $\left(\frac{2\times2-1\times(-4)}{2-1},\ 0\right)=(8,0)$

⇒ 중심이 (4, 0) 이고 반지름이 4인 원이다.

⇒ $(x-4)^2+y^2=16$

∴ △ABP 가 최대가 되는 점은 삼각형의 높이가 최대가 되는 점

즉, (4, 4) 또는 (4, −4)

이때의 △ABP 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times6\times4=12$

11. 중심이 직선 $2x+y=0$ 위에 있고, 두 점 $(3,\ 0)$, $(0,\ 1)$ 을 지나는 원의 방정식은 ?

① $x^2+y^2-2x+4y-6=0$

② $x^2+y^2+2x-4y-6=0$

③ $5x^2+5y^2-8x+16y-21=0$

④ $5x^2+5y^2+8x-16y-21=0$

⑤ $x^2+y^2-4x+8y-12=0$

해설

구하는 원의 중심이 직선 $2x+y=0$ 위에 있으므로 중심을 $(a,\ -2a)$ 라 할 수 있다.

$(x-a)^2+(y+2a)^2=r^2$

점 $(3,\ 0)$ 을 지나므로,

$(3-a)^2+(2a)^2=r^2 \cdots$ ①

또, 점 $(0,\ 1)$ 을 지나므로,

$a^2+(1+2a)^2=r^2 \cdots$ ②

①, ②에서 $a=\dfrac{4}{5},\ r^2=\dfrac{37}{5}$

$$\therefore \left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{8}{5}\right)^2=\frac{37}{5}$$

정리하면 $5x^2+5y^2-8x+16y-21=0$

12. 제1 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 r 인 원의 중심을 C_1, 제2 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}r$ 인 원의 중심을 C_2, 제3 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}r$ 인 원의 중심을 C_3, 제4 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}r$ 인 원의 중심을 C_4 라 하자.
$\overline{\mathrm{C_1C_2}}+\overline{\mathrm{C_2C_3}}+\overline{\mathrm{C_3C_4}}=14\sqrt{10}$ 일 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$\mathrm{C_1}\,(r, r)$, $\mathrm{C_2}\left(-\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r\right)$,

$\mathrm{C_3}\left(-\frac{1}{4}r, -\frac{1}{4}r\right)$, $\mathrm{C_4}\left(\frac{1}{8}r, -\frac{1}{8}r\right)$ 이므로

$$\overline{\mathrm{C_1C_2}}+\overline{\mathrm{C_2C_3}}+\overline{\mathrm{C_3C_4}}$$

$$=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}r\right)^2+\left(-\frac{1}{2}r\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{4}r\right)^2+\left(-\frac{3}{4}r\right)^2}$$

$$+\sqrt{\left(\frac{3}{8}r\right)^2+\left(\frac{1}{8}r\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{10}}{2}r+\frac{\sqrt{10}}{4}r+\frac{\sqrt{10}}{8}r$$

$$=\frac{7\sqrt{10}}{8}r=14\sqrt{10}$$

$$\therefore r=16$$