

1. 다음 중 집합 {1, 2, 4}의 진부분집합인 것을 모두 구하여라.

- ☐ Ⓐ $\emptyset$
- ☐ Ⓑ {1, 2}
- ☐ Ⓒ $\{x \mid x \text{는 } 4\text{의 약수}\}$
- ☐ Ⓓ $\{x \mid x \text{는 } 5\text{보다 작은 자연수}\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : Ⓐ

▶ 정답 : Ⓑ

해설

{1, 2, 4}의 진부분집합은 {1, 2, 4}의 부분집합 중 {1, 2, 4}를 제외한 나머지 부분집합이다.

Ⓒ $\{x \mid x \text{는 } 4 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 4\}$ 이다. 진부분집합은 자신을 제외한 것이므로 진부분집합이 아니다.

Ⓓ $\{x \mid x \text{는 } 5 \text{보다 작은 자연수}\} = \{1, 2, 3, 4\}$ 이다. 따라서 {1, 2, 4}의 부분집합이 아니다.

2. 다음 집합이 집합 $\{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$ 의 진부분집합이면 ○표, 진부분집합이 아니면 ×표를 하여라.

- (1) $\{8\}$ ()
- (2) $\{1, 5, 8\}$ ()
- (3) $\emptyset$ ()
- (4) $\{x \mid x \text{는 } 2 \text{의 약수}\}$ ()
- (5) $\{x \mid x \text{는 } 5 \text{보다 작은 자연수}\}$ ()

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ○

▷ 정답 : ×

▷ 정답 : ○

▷ 정답 : ○

▷ 정답 : ×

해설

$\{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 4, 8\}$ 의 진부분집합은 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{8\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 8\}, \{2, 4\}, \{2, 8\}, \{4, 8\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 8\}, \{1, 4, 8\}, \{2, 4, 8\}$ 이므로 (1), (3), (4)가 진부분집합이다.
(2) $\{1, 5, 8\}$ 은 진부분집합이 아니다.
(3) $\{x \mid x \text{는 } 5 \text{보다 작은 자연수}\} = \{1, 2, 3, 4\}$ 는 진부분집합이 아니다.

3. 집합 $A = \{x|x \text{는 } 20 \text{ 이하의 소수}\}$, $B = \{2, 11\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 X 의 개수는?

$B \subset X \subset A$

- ① 4개
- ② 8개
- ③ 16개
- ④ 32개
- ⑤ 64개

해설

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
 X 는 원소 2와 11을 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 X 의 개수는 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 64$ (개)이다.

4. 두 집합 $A = \{1, 7\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B$ 를 만족하는 집합 X 가 될 수 있는 것은?

① $\emptyset$

② $\{5\}$

③ $\{1, 3\}$

④ $\{1, 3, 5\}$

⑤ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

해설

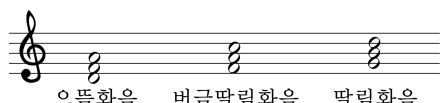
① $\{1, 7\} \not\subset \emptyset$

② $\{1, 7\} \not\subset \{5\}$

③ $\{1, 7\} \not\subset \{1, 3\}$

④ $\{1, 7\} \not\subset \{1, 3, 5\}$

5. 음높이가 다른 둘 이상의 음이 동시에 울릴 때 나는 소리를 화음이라고 하고, 으뜸화음, 버금딸림화음, 딸림화음을 주요 3 화음이라고 한다. 으뜸화음을 집합 A 라고 하고, 버금딸림화음을 B 라고 할 때, 다음 그림을 보고 $A \cup B$ 를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $A \cup B = \{\text{도, 미, 파, 솔, 라}\}$

해설

$A = \{\text{도, 미, 솔}\}, B = \{\text{파, 라, 도}\}$ 이므로 $A \cup B = \{\text{도, 미, 파, 솔, 라}\}$ 이다.

6. 세 집합 $A = \{x \mid x = 2 \times n - 1, n \text{은 자연수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 20\text{미만의 소수}\}$, $C = \{x \mid x \text{는 } 18\text{의 약수}\}$ 에 대하여 $B \cup (C \cap A)$ 의 모든 원소의 합을 구하여라.

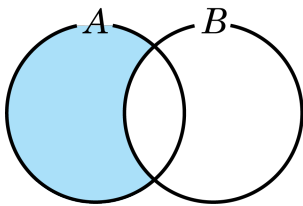
▶ 답 :

▷ 정답 : 87

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고치면 $A = \{2 \times 1 - 1, 2 \times 2 - 1, 2 \times 3 - 1, \dots\} = \{1, 3, 5, \dots\}$ 즉 홀수의 집합과 일치한다.
 $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, $C = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ 이다.
먼저 C 와 A 의 교집합을 구하면 $\{1, 3, 9\}$ 이다.
 $B \cup (C \cap A) = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$
따라서 모든 원소의 합을 구하면 $1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 17 + 19 = 87$

7. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내지 않는 것은?



- ① $A \cap B^c$ ② $A - B$ ③ $(A \cup B) - B$
④ $B \cap A^c$ ⑤ $A - (A \cap B)$

해설

$A - B = A \cap B^c = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$ 이므로 색칠한 부분을 나타내지 않는 것은 ④ 이다.

8. 전체 집합 $U = \{x|x \text{는 } 15\text{이하의 홀수}\}$ 에 대하여 $A = \{1, 3, 7, 11\}$, $B = \{7, 13\}$ 일 때, 다음 보기에서 옳지 않은 것은?

보기

- ㉠ $A \cap B = \{7\}$
- ㉡ $A \cap B^c = \{1, 3, 7, 11\}$
- ㉢ $A^c \cap B = \{13\}$
- ㉣ $A^c \cup B^c = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15\}$
- ㉤ $A^c \cap B^c = \{5, 9, 15\}$

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉡

해설

$U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \}$
 $A = \{1, 3, 7, 11\}$, $B = \{7, 13\}$
㉡ $A \cap B^c = A - B = \{1, 3, 11\}$
㉢ $A^c \cap B = B - A = \{13\}$
㉣ $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15\}$
㉤ $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{5, 9, 15\}$

9. 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면 $P \cup Q = P$, $Q \cap R = R$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참인 명제가 아닌 것은?

① $q \rightarrow p$

② $r \rightarrow q$

③ $r \rightarrow p$

④ $\sim q \rightarrow \sim r$

⑤ $\sim r \rightarrow \sim p$

해설

$P \cup Q = P$ 이므로 $Q \subset P$,

$Q \cap R = R$ 이므로 $R \subset Q$

따라서 $R \subset Q \subset P$

$\therefore r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $r \Rightarrow p$ 의 대우는 $\sim p \Rightarrow \sim r$

따라서 ⑤는 참인 명제라 할 수 없다.

10. 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자. $p \rightarrow q$ 가 참일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $P \cap Q = P$ ② $P \cup Q = Q$ ③ $P - Q = \emptyset$
④ $P \subset Q$ ⑤ $Q - P = Q$

해설

$p \rightarrow q$ 가 참이면 $P \subset Q$ 이므로 $P \cap Q = P, P \cup Q = Q, P - Q = \emptyset$ 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

11. 두 조건 $p: |x - k| \leq 1$, $q: -7 \leq x \leq 3$ 에서 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때, k 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -12

② -4

③ 8

④ 4

⑤ 12

해설

$P \subset Q$

$$p: |x - k| \leq 1 \rightarrow k - 1 \leq x \leq k + 1$$

$$-7 \leq k - 1 \rightarrow -6 \leq k$$

$$k + 1 \leq 3 \rightarrow k \leq 2$$

$$\therefore -6 \leq k \leq 2$$

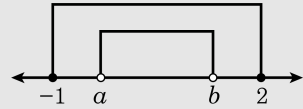
$$(-6) + 2 = -4$$

12. 명제 ‘ $a < x < b$ 이면 $-1 \leq x \leq 2$ 이다.’가 항상 참일 때, a 의 최솟값과 b 의 최댓값의 합은? (단, $a < b$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

명제 ‘ $a < x < b$ 이면 $-1 \leq x \leq 2$ 이다.’가 참이 되려면
 $\{x \mid a < x < b\} \subset \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$ 이어야 하므로 다음 그림에서
 $-1 \leq a < 2, -1 < b \leq 2$



따라서, a 의 최솟값과 b 의 최댓값의 합은 $(-1) + 2 = 1$

13. $x > 1$ 일 때, $2x + \frac{2}{x-1}$ 는 $x = a$ 일 때, 최솟값 b 를 갖는다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned} 2x + \frac{2}{x-1} &= 2 \left(x + \frac{1}{x-1} \right) \\ x + \frac{1}{x-1} &= (x-1) + \frac{1}{x-1} + 1 \\ &\geq 2 \sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} + 1 \\ &= 2 + 1 = 3 \\ \therefore 2 \left(x + \frac{1}{x-1} \right) &\geq 3 \cdot 2 = 6 \\ \text{최솟값은 } x-1 &= \frac{1}{x-1} \text{ 일 때 6이다} \\ \therefore \text{즉, } x &= 2 \text{ 일 때 최솟값은 6이다.} \\ \therefore a + b &= 2 + 6 = 8 \end{aligned}$$

14. 다음은 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1$ 을 만족하는 두 양수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 최솟값을 구하는 풀이 과정이다. 적절하지 못한 부분은?

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{4}{y}} = \frac{4}{\sqrt{xy}} \cdots \textcircled{㉠}$$
$$\therefore \sqrt{xy} \geq 4 \cdots \textcircled{㉡}$$
$$\therefore x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2 \cdot 4 = 8 \cdots \textcircled{㉢}$$

따라서 $x+y$ 의 최솟값은 8이다. $\cdots \textcircled{㉣}$

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉢
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉢, ㉣

해설

㉠에서 등호가 성립하는 경우는 $\frac{1}{x} = \frac{4}{y}$, 즉 $y = 4x$ 일 때이고,
㉢에서 등호가 성립하는 경우는 $x = y$ 일 때이므로 서로 일치하지 않는다.
따라서, $x+y$ 의 최솟값은 8이 될 수가 없다.

15. 함수 $f(x) = ax + 3$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f^{-1} = f$ 의 양변에 함수 f 를 합성하면

$$f^{-1} \circ f = f \circ f$$

이때, $f^{-1} \circ f = I$ (I 는 항등함수) 이므로 $f \circ f = I$

$$\text{즉 } (f \circ f)(x) = x$$

$$\begin{aligned} \therefore (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f(ax + 3) \\ &= a(ax + 3) + 3 = a^2x + 3a + 3 = x \end{aligned}$$

따라서 $a^2 = 1$, $3a + 3 = 0$ 이므로 $a = -1$

16. 점 $(6, -2)$ 를 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$
 $f(x) = a(x - 6) - 2 = ax - 6a - 2 (a \neq 0)$ 로 놓으면
 $f(f(x)) = a(ax - 6a - 2) - 6a - 2 = x$
 $\therefore a^2x - 6a^2 - 8a - 2 = x$
즉, $a^2 = 1, -6a^2 - 8a - 2 = 0$ 이므로 $a = -1$
따라서 $f(x) = -x + 4$ 이므로
 $f(-1) = -(-1) + 4 = 5$

17. $2 + \frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}} = \frac{37}{13}$ 을 만족시키는 정수 x, y, z 에 대하여 $x + y + z$ 의

값을 구하면?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

2를 우변으로 이항하고 정리하면

$$\frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}} = \frac{11}{13}$$

역수를 취하면 $x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{13}{11} = 1 + \frac{2}{11}$

$$\therefore x = 1$$

$$\text{또, } y + \frac{1}{z} = \frac{11}{2} = 5 + \frac{1}{2}$$

$$\therefore y = 5, z = 2$$

$$\text{따라서 } x + y + z = 8$$

18. 등식 $\frac{255}{157} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e}}}}$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e

의 합은?

- ① 11
- ② 12
- ③ 13
- ④ 14
- ⑤ 15

해설

$$\begin{aligned} \frac{225}{157} &= 1 + \frac{68}{157} = 1 + \frac{1}{\frac{157}{68}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{21}{68}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{5}{21}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}} \end{aligned}$$

$\therefore a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5$
 $\therefore a + b + c + d + e = 15$

19. $x^2 - 2x - 1 = 0$ 일 때, $3x^2 + 2x - 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$x^2 - 2x - 1 = 0$ 에서 양변을 x 로 나누면 $x - \frac{1}{x} = 2$

따라서 구하는 식은

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= 3 \left\{ \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 + 2 \right\} + 2 \left(x - \frac{1}{x} \right) - 1 \\ &= 21\end{aligned}$$

20. $x + y = 6$, $xy = 4$ (단, $x > y$) 일 때, $\frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$ 의 값은?

- ① $\frac{2\sqrt{5}}{9}$ ② $\frac{4\sqrt{5}}{9}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{5}$

해설

$$\begin{aligned} x + y &= 6, \quad xy = 4 \quad (x > y) \text{ 이면} \\ (x - y)^2 &= (x + y)^2 - 4xy = 36 - 16 = 20 \\ \therefore x - y &= \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \quad (\because x > y) \\ (\text{준 식}) &= \frac{(x - y)^3 + 3xy(x - y)}{(x + y)^3 - 3xy(x + y)} \\ &= \frac{\sqrt{20}^3 + 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{20}}{6^3 - 3 \cdot 4 \cdot 6} \\ &= \frac{4\sqrt{5}}{9} \end{aligned}$$

21. 작년엔 3 만원 하던 야구 배트와 2 만원 하던 글러브가 올해는 각각 10%, 15% 가 인상되었다. 야구 배트와 글러브를 한 세트로 볼 때, 한 세트의 인상률은?

- ① 11.5 %
- ② 12 %
- ③ 12.5 %
- ④ 13 %
- ⑤ 13.5 %

해설

작년의 한 세트의 가격 : $30000 + 20000 = 50000$ (원)
금년의 야구 배트의 가격 : $30000 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 33000$ (원)
금년의 글러브의 가격 : $20000 \times \left(1 + \frac{15}{100}\right) = 23000$ (원)
금년의 한 세트의 가격 : $33000 + 23000 = 56000$ (원)
따라서 한 세트의 가격은 $56000 - 50000 = 6000$ (원) 인상되었으므로,
인상률은 $\frac{6000}{50000} \times 100 = 12$ (%) 이다.

22. A, B 두 학교의 남녀 학생들이 함께 치른 수학 시험의 평균이 아래 표와 같을 때, A, B 두 학교 전체의 여학생의 평균은?

구분	A학교	B학교	A,B전체
남학생	71	81	79
여학생	76	90	?
전체	74	84	

- ① 81
- ② 82
- ③ 83
- ④ 84
- ⑤ 85

해설

A 학교의 남녀 학생 수를 각각 b, g
B 학교의 남녀 학생 수를 각각 B, G 라 하자.

$$\frac{71b + 76g}{b + g} = 74, \frac{81B + 90G}{B + G} = 84,$$

$$\frac{71b + 81B}{b + B} = 79$$

$$g = 1.5b, G = 0.5B, B = 4b$$

따라서 구하는 평균은

$$\begin{aligned} \frac{76g + 90G}{g + G} &= \frac{76(1.5b) + 90(2b)}{1.5b + 2b} \\ &= \frac{114 + 180}{3.5} = 84 \end{aligned}$$

23. $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ 일 때 $f^{1999}(0)$ 의 값은? (단 $f^2(x) = (f \circ f)(x), \dots, f^{n+1}(x) = (f \circ f^n)(x)$)

- ① $\frac{3}{2}$ ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$f(0) = 3,$$

$$f^2(0) = \frac{6-3}{3-1} = \frac{3}{2}, f^3(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\therefore f^{3n}(0) = 0$$

$$1999 = 666 \times 3 + 1$$

$$\therefore f^{1999}(0) = f(0) = 3$$

24. 분수함수 $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}$ 에 대하여 $f(x) + g(x) = 1$ 을 만족하는

$g(x)$ 는?

- ① $x+2$ ② $x+1$ ③ $\frac{1}{x+2}$ ④ $\frac{1}{x+1}$ ⑤ $\frac{1}{x}$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}} \\ &= \frac{1}{\frac{1+x+1}{1+x}} \\ &= \frac{x+1}{x+2} \\ &= 1 - \frac{1}{x+2} \\ \therefore g(x) &= 1 - f(x) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{x+2}\right) \\ &= \frac{1}{x+2} \end{aligned}$$