

1. 다음 두 조건으로 알 수 있는 것은?

- ㉠ 어떤 사람은 안경을 끼지 않았다.

㉡ 여자는 모두 안경을 썼다.

- ① 남자는 모두 안경을 썼다.

② 안경을 끼지 않은 여자도 있다.

③ 여자는 모두 안경을 끼지 않았다.

④ 안경을 끼지 않은 남자도 있다.

⑤ 남자는 모두 안경을 끼지 않는다.

해설

안경을 낀 사람의 집합을 A , 여자의 집합을 B 라고 하면
㉠ $A^c \neq \phi$
㉡ $B \subset A \Rightarrow A^c \subset B^c$
안경을 쓰지 않는 사람은 여자가 아니다.
 $\therefore$ 안경을 끼지 않은 남자도 있다.

2. 다음 두 진술이 모두 참이라 할 때 다음 중 옳은 것은?

- ㉠ 수학을 잘하는 학생은 머리가 좋다.

㉡ 수학을 잘하는 학생은 물리 또는 컴퓨터를 잘한다.

- ① 수학을 잘하는 학생은 물리를 잘한다.

② 컴퓨터를 잘하는 학생은 머리가 좋다.

③ 머리가 좋은 학생은 물리를 잘 한다.

④ 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.

⑤ 물리와 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.

해설

p : 수학을 잘하는 학생, q : 머리가 좋다, r : 물리 또는 컴퓨터를 잘 한다.
 $p \Rightarrow q, p \Rightarrow r$ 에서 대우명제도 참이므로 $\sim q \Rightarrow \sim p$ 에서 ‘머리가 좋지 않은 학생은 수학을 잘 못한다.’
 $\sim r \Rightarrow \sim p$ 에서 ‘물리와 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.’

3. 다음은 ‘ a, b, c 가 자연수일 때, $a^2 + b^2 = c^2$ 이면 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이다.’임을 증명한 것이다.

a, b 가 모두 (가)가 아니라고 가정하면, $a = 3m \pm 1, b = 3n \pm 1$ (단, m, n 은 자연수)로 놓을 수 있다. 이 때, $a^2 + b^2 = 3M + (\text{나})$ (단, M 은 자연수) $\cdots \text{㉠}$
또, $c = 3l, 3l \pm 1$ (단, l 은 자연수)라 하면, $c^2 = 3M'$ 또는 $c^2 = 3M'' + (\text{다})$ (단, M', M'' 은 자연수)가 되어 ㉠의 $3M + (\text{나})$ 의 꼴로는 쓸 수 없다. 따라서, 모순이므로 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이어야 한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

- ① 자연수, 1, 2
- ② 자연수, 2, 1
- ③ 3의 배수, 1, 2
- ④ 3의 배수, 2, 1
- ⑤ 3의 배수, 2, 2

해설

a, b 가 모두 3의 배수가 아니라고 가정하면
 $a = 3m \pm 1, b = 3n \pm 1$ (단, m, n 은 자연수)로 놓을 수 있다.
이 때, $a^2 + b^2 = (3m \pm 1)^2 + (3n \pm 1)^2 = 3(3(m^2 + n^2) \pm 2(m + n)) + 2 = 3M + 2$ (단, M 은 자연수) $\cdots \text{㉠}$
한편, $c = 3l, 3l \pm 1$ (단, l 은 자연수)로 놓을 수 있으므로
 $c^2 = 9l^2$ 또는 $c^2 = (3l \pm 1)^2 = 3(3l^2 \pm 2l) + 1$
즉, $c^2 = 3M'$ 또는 $c^2 = 3M + 1$ (단, M', M 은 자연수)의 꼴이 되어 ㉠의 $3M + 2$ 의 꼴로 쓸 수 없다. 따라서, 모순이므로 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이다.

4. 자연수 n 에 대하여 ' n^2 이 짝수이면 n 도 짝수이다.'를 증명하는 과정이다. 이 때 괄호 안에 들어갈 알맞은 논리 중 틀린 것을 아래의 보기에서 고르면?

증명

주어진 명제의 (①)를 구하여 보면 n 이 (②)이면 n^2 도 (②)이다. 이 때 n 이 (②)이므로 $n =$ (③) (k 는 0 또는 자연수)
이 때 $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
 $\therefore n^2$ 은 (②)이다. 따라서, (①)가 (④)이므로 주어진 명제는 (⑤)이다.

① 대우

② 홀수

③ $2k + 1$

④ 거짓

⑤ 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

5. $a > b$, $x > y$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $(a + b)(x + y) > 2(ax + by)$

② $(a + b)(x + y) < 2(ax + by)$

③ $(a + b)(x + y) \geq 2(ax + by)$

④ $(a + b)(x + y) \leq 2(ax + by)$

⑤ $(a + b)(x + y) = 2(ax + by)$

해설

$$(a + b)(x + y) - 2(ax + by)$$

$$= ay + bx - ax - by$$

$$= a(y - x) - b(y - x)$$

$$= (a - b)(y - x)$$

$$\text{그런데 } a - b > 0, y - x < 0$$

$$\therefore (a + b)(x + y) < 2(ax + by)$$

6. 다음은 $|a| < 1$, $|b| < 1$, $|c| < 1$ 일 때 부등식 $abc + 2 > a + b + c$ 가 성립함을 증명한 것이다. ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

$$\begin{aligned} abc + 2 &> a + b + c \\ &= abc + 1 + 1 - a - b - c \\ &= (1 - ab)(1 - c) + (\text{㉠}) \end{aligned}$$

$|a| < 1$ 이므로 $(\text{㉡}) < 1 - a < (\text{㉢})$

같은 방법으로 $(\text{㉢}) < 1 - b < (\text{㉢})$,

$$(\text{㉡}) < 1 - c < (\text{㉢})$$

또한 $|ab| < 1$ 이므로 $(\text{㉡}) < 1 - ab < (\text{㉢})$

따라서 $abc + 2 - (a + b + c) = (1 - ab)(1 - c) + (\text{㉠}) > (\text{㉡})$

이므로 $abc + 2 > a + b + c$

① $(1 + a)(1 + b), 0, 2$

② $(1 - a)(1 + b), 0, 2$

③ $(1 + a)(1 + b), -1, 1$

④ $(1 - a)(1 - b), 0, 2$

⑤ $(1 - a)(1 - b), -1, 1$

해설

$$\begin{aligned} abc + 2 > a + b + c &= abc + 1 + 1 - a - b - c \\ &= abc - ab - c + 1 + 1 + ab - a - b \\ &= (1 - ab)(1 - c) + (1 - a)(1 - b) \end{aligned}$$

$|a| < 1$ 이므로 $-1 < a < 1$ 이므로 $0 < 1 - a < 2$

$|b| < 1$ 이므로 $-1 < b < 1$ 이므로 $0 < 1 - b < 2$

$|c| < 1$ 이므로 $-1 < c < 1$ 이므로 $0 < 1 - c < 2$

또한 $|ab| < 1$ 이므로 $0 < 1 - ab < 2$

따라서 $abc + 2 - (a + b + c)$

$$= (1 - ab)(1 - c) + (1 - a)(1 - b) > 0$$

이므로 $abc + 2 > a + b + c$

7. a, b 가 실수 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $|a| + |b| \geq |a + b|$

㉡ $|a + b| \geq |a - b|$

㉢ $|a - b| \geq |a| - |b|$

㉣ $|a + b| \geq |a| - |b|$

① ㉠

② ㉡, ㉢

③ ㉠, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ : $(|a| + |b|)^2 = a^2 + b^2 + 2|a| \cdot |b|$

$|a + b|^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$2|a||b| \geq 2ab$ (참)

㉡ : $|a + b|^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$|a - b|^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$2ab \geq -2ab \Rightarrow$ 알수없다 (거짓)

㉢ : $|a - b|^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2$

$-2ab \geq -2|a||b|$ ($\because |a||b| \geq ab$) (참)

㉣ : $|a + b|^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$|a| - |b|^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2$

$2ab > -2|a||b|$ (참)

8. $0 < a < b$, $a + b = 1$ 일 때 1, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sqrt{b} - \sqrt{a}$, $\sqrt{b-a}$ 의 대소를 비교하면?
- ① $\sqrt{b-a} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b} < 1$
② $\sqrt{b-a} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < 1 < \sqrt{a} + \sqrt{b}$
③ $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a} < 1 < \sqrt{a} + \sqrt{b}$
④ $\sqrt{b-a} < 1 < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$
⑤ $1 < \sqrt{b-a} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

먼저 주어진 식을 각각 제곱하면

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$$

$$(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$$

$$(\sqrt{b-a})^2 = b - a$$

이 때 $1 = a + b$ 이므로 $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{4}$ 을 대입하여

크기를 예상하여 두 식의 차를 알아보면

$$(a + b + 2\sqrt{ab}) - (a + b) = 2\sqrt{ab} > 0$$

$$\therefore 1 = a + b < a + b + 2\sqrt{ab} \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(a + b) - (b - a) = 2a > 0$$

$$\therefore b - a < a + b = 1 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$(b - a) - (a + b - 2\sqrt{ab})$$

$$= -2a + 2\sqrt{ab}$$

$$= 2\sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) > 0$$

$$\therefore a + b - 2\sqrt{ab} < b - a \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢에서

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a} < 1 < \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

9. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : 2 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{5^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$ 이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$\therefore n = 1, 2$

n 의 갯수는 2 개이다.

10. 다음 중 세 수 3^{30} , 4^{20} , 12^{15} 의 대소 관계를 알맞게 나타낸 것은?

① $3^{30} > 4^{20} > 12^{15}$

② $4^{20} > 3^{30} > 12^{15}$

③ $12^{15} > 4^{20} > 3^{30}$

④ $3^{30} > 12^{15} > 4^{20}$

⑤ $12^{15} > 3^{30} > 4^{20}$

해설

$$\left(\frac{3^{1.5}}{4}\right)^{20} = \left(\frac{3 \times 1.7}{4}\right)^{20} > 1(3^{1.5} = 3\sqrt{3} \approx 3 \times 1.7)$$

따라서 3^{30} 이 4^{20} 보다 크다.

$$\left(\frac{3^2}{12}\right)^{15} = \left(\frac{3}{4}\right)^{15} < 1 \text{ 이 결과에서}$$

12^{15} 이 3^{30} 보다 크다는 것을 알 수 있다.

11. 부등식 $7^{20} < n^{10}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

$$\frac{7^{20}}{n^{10}} = \frac{(7^2)^{10}}{n^{10}} = \left(\frac{49}{n}\right)^{10} < 1$$

$$\frac{49}{n} < 1 \text{ 이므로 } n > 49$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 50 이다.

12. 부등식 $n^{20} < 3^{30}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값은?

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$$\frac{n^{20}}{3^{30}} = \frac{(n^2)^{10}}{(3^3)^{10}} = \left(\frac{n^2}{27}\right)^{10} < 1$$

$$\frac{n^2}{27} < 1 \text{ 이므로 } n^2 < 27$$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 5이다.

13. 다음 부등식 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $3^{40} > 2^{60}$

㉡ $3^{200} > 6^{150}$

㉢ $5^{10} < 2^{30} < 3^{20}$

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉠, ㉡
- ④ ㉠, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\frac{3^{40}}{2^{60}} = \frac{(3^2)^{20}}{(2^3)^{20}} = \left(\frac{9}{8}\right)^{20} > 1$

$\therefore 3^{40} > 2^{60}$

㉡ $\frac{3^{200}}{6^{150}} = \frac{(3^4)^{50}}{(6^3)^{50}} = \frac{(3^4)^{50}}{(2^3 \cdot 3^3)^{50}} = \left(\frac{3}{8}\right)^{50} < 1$

$\therefore 3^{200} < 6^{150}$

㉢ $\frac{5^{10}}{2^{30}} = \frac{5^{10}}{(2^3)^{10}} = \left(\frac{5}{8}\right)^{10} < 1 \quad \therefore 5^{10} < 2^{30}$

$\frac{2^{30}}{3^{20}} = \frac{(2^3)^{10}}{(3^2)^{10}} = \left(\frac{8}{9}\right)^{10} < 1 \quad \therefore 2^{30} < 3^{20}$

$\therefore 5^{10} < 2^{30} < 3^{20}$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢ 이다.

14. 임의의 실수 a, b, c 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

- ㉠ $|a| = -a$
- ㉡ $a > b > 0$ 일 때, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 이다.
- ㉢ $|a| \geq 0$, $|a| \geq a$, $|a| = |-a|$ 이다.
- ㉣ $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$
- ㉤ $|a - b| \geq |a| - |b|$

해설

- ㉠ $|a| = a(a \geq 0)$
 $-a(a < 0)$
- ㉡ 참
- ㉢ 참
- ㉣ $(|a + b + c|)^2$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
 $(|a| + |b| + |c|)^2$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2(|a||b| + |b||c| + |c||a|)$
 $|a||b| \geq ab, |b||c| \geq bc, |c||a| \geq ca$
 $\therefore |a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$
- ㉤ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 $(|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2 (\because |a||b| \geq ab)$
 $\therefore |a - b| \geq |a| - |b|$

15. 실수 x, y 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

- $\textcircled{\tiny \ominus} \quad |x| + |y| \geq |x + y|$

$\textcircled{\tiny \omin�} \quad |x + y| \geq |x - y|$
- $\textcircled{\tiny \oplus} \quad |x - y| \geq |x| - |y|$

- $\textcircled{1} \quad \textcircled{\tiny \ominus}$

$\textcircled{2} \quad \textcircled{\tiny \omin�}$

$\textcircled{3} \quad \textcircled{\tiny \omin�}, \textcircled{\tiny \omin�}$

$\textcircled{4} \quad \textcircled{\tiny \omin�}, \textcircled{\tiny \oplus}$

$\textcircled{5} \quad \textcircled{\tiny \omin�}, \textcircled{\tiny \oplus}$

해설

$\textcircled{\tiny \ominus} \quad (|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 = 2(|xy| - xy) \geq 0$
 $\therefore |x| + |y| \geq |x + y|$

$\textcircled{\tiny \omin�} \quad (\text{반례}) \quad x = 1, y = -1 \text{ 일 때}$
 $|1 + (-1)| = 0, \quad |1 - (-1)| = 2 \text{ 이므로}$
 $|x + y| < |x - y|$

$\textcircled{\tiny \oplus} \quad |x - y|^2 - (|x| - |y|)^2 = 2(|xy| - xy) \geq 0$
 $\therefore |x - y| \geq |x| - |y|$

따라서 옳은 것은 $\textcircled{\tiny \omin�}, \textcircled{\tiny \oplus}$ 이다.

16. 모든 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + 2axy + by^2 = 0$ 이 항상 성립하기 위한 실수 a, b 의 조건은?

① $a \leq b^2$

② $b^2 \leq a$

③ $a^2 \leq b$

④ $b \leq a^2$

⑤ $a^2 = b$

해설

모든 실수 x 에 대하여

$x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$ 이 성립하려면

$$D/4 = (ay)^2 - by^2 = (a^2 - b)y^2 \leq 0$$

이 부등식이 모든 y 에 대하여 성립하려면

$$y^2 \geq 0 \text{ 이므로 } a^2 - b \leq 0$$

$$\therefore a^2 \leq b$$

17. 모든 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$ 이 성립하기 위한 실수 a, b 의 조건은?

① $a \leq b^2$

② $b^2 \leq a$

③ $a^2 \leq b$

④ $b \leq a^2$

⑤ $b \leq 4a^2$

해설

$x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$ 에서 양변을 y^2 으로 나누면

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2a\left(\frac{x}{y}\right) + b \geq 0$$

모든 실수 x, y 에 대해 성립하려면

$$\frac{D}{4} = a^2 - b \leq 0$$

$$\therefore a^2 \leq b$$

18. 다음은 실수 a, b, c 가 모두 양수일 때, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$ 임을 보이는 과정이다. [㉔] 안에 들어갈 알맞은 식은?

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c)(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2) \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c) \text{ [㉔]} \geq 0 \end{aligned}$$

- ① $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$
- ② $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$
- ③ $(a + b)^2 - (b + c)^2 - (c + a)^2$
- ④ $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$
- ⑤ $(a - b)^2 - (b - c)^2 - (c - a)^2$

해설

$$\begin{aligned} \text{① } & \{(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)\} \\ &= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \end{aligned}$$

19. 실수 x, y 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ $x > y$ 이면, $x^2 > y^2$ 이다.

㉡ $x^2 + y^2 \geq xy$

㉢ $x > y$ 이면 $x^3 > y^3$ 이다.

- ① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

- ㉠. (반례) $x = 2, y = -3$ 일 때, $4 < 9 \quad \therefore$ 거짓
- ㉡. $x^2 + y^2 - xy = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$
 $\therefore x^2 + y^2 \geq xy$
 $\therefore$ 참
- ㉢. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
 $x - y > 0, x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$
 $\therefore x^3 - y^3 > 0, x^3 > y^3$
 $\therefore$ 참

20. 실수 a, b, c, x, y 에 대하여 항상 성립하는 부등식(절대부등식)을 다음 [보기] 중에서 고를 때, 옳은 표현의 개수는?

보기

- (㉠) $x^2 - xy + y^2 \geq 0$
- (㉡) $x^2 - x + 1 > 0$
- (㉢) $|a + b| \leq |a| + |b|$
- (㉣) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
- (㉤) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$
- (㉥) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

- ① 6개 ② 5개 ③ 4개 ④ 3개 ⑤ 2개

해설

- (㉣) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (단, $a = b$ 일때 등호성립)
(㉤) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$ (단, $a = b = c$ 일때 등호성립)