1. 다음 두 조건으로 알 수 있는 것은?

> ㉠ 어떤 사람은 안경을 끼지 않았다.
>
> ㉡ 여자는 모두 안경을 꼈다.

① 남자는 모두 안경을 꼈다.

② 안경을 끼지 않은 여자도 있다.

③ 여자는 모두 안경을 끼지 않았다.

④ 안경을 끼지 않은 남자도 있다.

⑤ 남자는 모두 안경을 끼지 않는다.

해설

안경을 낀 사람의 집합을 A, 여자의 집합을 B 라고 하면

㉠ $A^c \neq \phi$

㉡ $B \subset A \;\Rightarrow\; A^c \subset B^c$

안경을 쓰지 않는 사람은 여자가 아니다.

$\therefore$ 안경을 끼지 않은 남자도 있다.

2. 다음 두 진술이 모두 참이라 할 때 다음 중 옳은 것은?

㉠ 수학을 잘하는 학생은 머리가 좋다.

㉡ 수학을 잘하는 학생은 물리 또는 컴퓨터를 잘한다.

① 수학을 잘하는 학생은 물리를 잘한다.

② 컴퓨터를 잘하는 학생은 머리가 좋다.

③ 머리가 좋은 학생은 물리를 잘 한다.

④ 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.

⑤ 물리와 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.

해설

p : 수학을 잘하는 학생, q : 머리가 좋다, r : 물리 또는 컴퓨터를 잘 한다.$p \Rightarrow q$, $p \Rightarrow r$에서 대우명제도 참이므로$\sim q \Rightarrow \sim p$ 에서 '머리가 좋지 않은 학생은 수학을 잘 못한다.'$\sim r \Rightarrow \sim p$ 에서 '물리와 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.'

3. 다음은 'a, b, c 가 자연수일 때, $a^2+b^2=c^2$ 이면 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이다.' 임을 증명한 것이다.

> a, b 가 모두 (가) 가 아니라고 가정하면, $a=3m\pm1, b=3n\pm1$ (단, m, n 은 자연수) 로 놓을 수 있다. 이 때, $a^2+b^2=3M+$(나) (단, M 은 자연수) $\cdots$ ㉠
> 또, $c=3l$, $3l\pm1$ (단, l 은 자연수) 라 하면, $c^2=3M'$ 또는 $c^2=3M''+$(다) (단, M', M'' 은 자연수) 가 되어 ㉠의 $3M+$(나) 의 꼴로는 쓸 수 없다. 따라서, 모순이므로 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이어야 한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 차례로 적으면?

① 자연수, 1, 2
② 자연수, 2, 1
③ 3 의 배수, 1, 2
④ 3 의 배수, 2, 1
⑤ 3 의 배수, 2, 2

해설

a, b가 모두 3 의 배수가 아니라고 가정하면
$a=3m\pm1$, $b=3n\pm1$ (단, m, n 은 자연수) 로 놓을 수 있다.
이 때, $a^2+b^2=(3m\pm1)^2+(3n\pm1)^2=3\{3(m^2+n^2)\pm2(m+n)\}+2$
$=3M+2$ (단, M은 자연수) $\cdots\cdots$ ㉠
한편, $c=3l$, $3l\pm1$ (단, l 은 자연수) 로 놓을 수 있으므로
$c^2=9l^2$ 또는 $c^2=(3l\pm1)^2=3(3l^2\pm2l)+1$
즉, $c^2=3M'$ 또는 $c^2=3M+1$ (단, M', M 은 자연수) 의 꼴이 되어 ㉠의 $3M+2$ 의 꼴로 쓸 수 없다. 따라서, 모순이므로 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이다.

4. 자연수 n에 대하여 'n^2이 짝수이면 n도 짝수이다.'를 증명하는 과정이다. 이 때 괄호 안에 들어갈 알맞은 논리 중 <u>틀린</u> 것을 아래의 보기에서 고르면?

증명

주어진 명제의 (①)를 구하여 보면 n이 (②)이면 n^2 도 (②)이다. 이 때 n이 (②)이므로 $n = $(③) ($k$ 는 0 또는 자연수)
이 때 $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
$\therefore$ n^2은 (②)이다. 따라서, (①)가 (④)이므로 주어진 명제는 (⑤)이다.

① 대우　　② 홀수　　③ $2k+1$

④ 거짓　　⑤ 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

5. $a > b,\ x > y$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $(a+b)(x+y) > 2(ax+by)$

② $(a+b)(x+y) < 2(ax+by)$

③ $(a+b)(x+y) \geq 2(ax+by)$

④ $(a+b)(x+y) \leq 2(ax+by)$

⑤ $(a+b)(x+y) = 2(ax+by)$

해설

$(a+b)(x+y) - 2(ax+by)$
$= ay + bx - ax - by$
$= a(y-x) - b(y-x)$
$= (a-b)(y-x)$

그런데 $a-b>0,\ y-x<0$

$\therefore (a+b)(x+y) < 2(ax+by)$

6. 다음은 $|a| < 1,\ |b| < 1,\ |c| < 1$ 일 때 부등식 $abc + 2 > a + b + c$ 가 성립함을 증명한 것이다. ㉠,㉡,㉢에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

$$
\begin{aligned}
& abc + 2 > a + b + c \\
& = abc + 1 + 1 - a - b - c \\
& = (1 - ab)(1 - c) + (㉠)
\end{aligned}
$$

$|a| < 1$ 이므로 $(㉡) < 1 - a < (㉢)$

같은 방법으로 $(㉡) < 1 - b < (㉢)$,

$(㉡) < 1 - c < (㉢)$

또한 $|ab| < 1$ 이므로 $(㉡) < 1 - ab < (㉢)$

따라서 $abc + 2 - (a + b + c) = (1 - ab)(1 - c) + (㉠) > (㉡)$

이므로 $abc + 2 > a + b + c$

① $(1 + a)(1 + b), 0, 2$

② $(1 - a)(1 + b), 0, 2$

③ $(1 + a)(1 + b), -1, 1$

④ $(1 - a)(1 - b), 0, 2$

⑤ $(1 - a)(1 - b), -1, 1$

해설

$$
\begin{aligned}
abc + 2 > a + b + c &= abc + 1 + 1 - a - b - c \\
&= abc - ab - c + 1 + 1 + ab - a - b \\
&= (1 - ab)(1 - c) + (1 - a)(1 - b)
\end{aligned}
$$

$|a| < 1$ 이므로 $-1 < a < 1$ 이므로 $0 < 1 - a < 2$

$|b| < 1$ 이므로 $-1 < b < 1$ 이므로 $0 < 1 - b < 2$

$|c| < 1$ 이므로 $-1 < c < 1$ 이므로 $0 < 1 - c < 2$

또한 $|ab| < 1$ 이므로 $0 < 1 - ab < 2$

따라서 $abc + 2 - (a + b + c)$

$= (1 - ab)(1 - c) + (1 - a)(1 - b) > 0$

이므로 $abc + 2 > a + b + c$

7. a, b가 실수 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면?

보기

ㄱ $|a|+|b| \geqq |a+b|$　　ㄴ $|a+b| \geqq |a-b|$

ㄷ $|a-b| \geqq |a|-|b|$　　ㄹ $|a+b| \geqq ||a|-|b||$

① ㄱ　② ㄴ, ㄷ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄱ, ㄷ, ㄹ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

해설

ㄱ : $(|a|+|b|)^2 = a^2+b^2+2|a|\cdot|b|$

$|a+b|^2 = a^2+2ab+b^2$

$2|a||b| \geq 2ab$ (참)

ㄴ : $|a+b|^2 = a^2+2ab+b^2$

$|a-b|^2 = a^2-2ab+b^2$

$2ab \geq -2ab \Rightarrow$ 알수없다 (거짓)

ㄷ : $|a-b|^2 = a^2-2ab+b^2$

$(|a|-|b|)^2 = a^2-2|a||b|+b^2$

$-2ab \geq -2|a||b|$ ($\because$ $|a||b| \geq ab$) (참)

ㄹ : $|a+b|^2 = a^2+2ab+b^2$

$||a|-|b||^2 = a^2-2|a||b|+b^2$

$2ab > -2|a||b|$ (참)

8. $0 < a < b,\ a + b = 1$ 일 때 $1,\ \sqrt{a} + \sqrt{b},\ \sqrt{b} - \sqrt{a},\ \sqrt{b-a}$의 대소를 비교하면?

① $\sqrt{b-a} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b} < 1$

② $\sqrt{b-a} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < 1 < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

③ $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a} < 1 < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

④ $\sqrt{b-a} < 1 < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

⑤ $1 < \sqrt{b-a} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

먼저 주어진 식을 각각 제곱하면

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$

$(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$

$(\sqrt{b-a})^2 = b - a$

이 때 $1 = a + b$ 이므로 $a = \frac{1}{4},\ b = \frac{3}{4}$ 을 대입하여

크기를 예상하여 두 식의 차를 알아보면

$(a + b + 2\sqrt{ab}) - (a + b) = 2\sqrt{ab} > 0$

$\therefore 1 = a + b < a + b + 2\sqrt{ab} \cdots$ ㉠

$(a + b) - (b - a) = 2a > 0$

$\therefore b - a < a + b = 1 \cdots$ ㉡

$(b - a) - (a + b - 2\sqrt{ab})$

$= -2a + 2\sqrt{ab}$

$= 2\sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a}\ 0 > 0$

$\therefore a + b - 2\sqrt{ab} < b - a \cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a} < 1 < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

9. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{50^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$\therefore n = 1,\ 2$

n의 갯수는 2 개이다.

10. 다음 중 세 수 3^{30}, 4^{20}, 12^{15} 의 대소 관계를 알맞게 나타낸 것은?

① $3^{30} > 4^{20} > 12^{15}$

② $4^{20} > 3^{30} > 12^{15}$

③ $12^{15} > 4^{20} > 3^{30}$

④ $3^{30} > 12^{15} > 4^{20}$

⑤ $12^{15} > 3^{30} > 4^{20}$

해설

$$\left(\frac{3^{1.5}}{4}\right)^{20} = \left(\frac{3\times 1.7}{4}\right)^{20} > 1 (3^{1.5} = 3\sqrt{3} \fallingdotseq 3\times 1.7)$$

따라서 3^{30} 이 4^{20} 보다 크다.

$$\left(\frac{3^2}{12}\right)^{15} = \left(\frac{3}{4}\right)^{15} < 1$$ 이 결과에서

12^{15} 이 3^{30} 보다 크다는 것을 알 수 있다.

11. 부등식 $7^{20} < n^{10}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

$$\frac{7^{20}}{n^{10}} = \frac{(7^2)^{10}}{n^{10}} = \left(\frac{49}{n}\right)^{10} < 1$$

$\frac{49}{n} < 1$ 이므로 $n > 49$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 50 이다.

12. 부등식 $n^{20} < 3^{30}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$$\frac{n^{20}}{3^{30}} = \frac{(n^2)^{10}}{(3^3)^{10}} = \left(\frac{n^2}{27}\right)^{10} < 1$$

$\frac{n^2}{27} < 1$ 이므로 $n^2 < 27$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 5 이다.

13. 다음 부등식 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $3^{40} > 2^{60}$	㉡ $3^{200} > 6^{150}$
㉢ $5^{10} < 2^{30} < 3^{20}$	

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\dfrac{3^{40}}{2^{60}} = \dfrac{(3^2)^{20}}{(2^3)^{20}} = \left(\dfrac{9}{8}\right)^{20} > 1$

$\therefore\ 3^{40} > 2^{60}$

㉡ $\dfrac{3^{200}}{6^{150}} = \dfrac{(3^4)^{50}}{(6^3)^{50}} = \dfrac{(3^4)^{50}}{(2^3 \cdot 3^3)^{50}} = \left(\dfrac{3}{8}\right)^{50} < 1$

$\therefore\ 3^{200} < 6^{150}$

㉢ $\dfrac{5^{10}}{2^{30}} = \dfrac{5^{10}}{(2^3)^{10}} = \left(\dfrac{5}{8}\right)^{10} < 1 \quad \therefore\ 5^{10} < 2^{30}$

$\dfrac{2^{30}}{3^{20}} = \dfrac{(2^3)^{10}}{(3^2)^{10}} = \left(\dfrac{8}{9}\right)^{10} < 1 \quad \therefore\ 2^{30} < 3^{20}$

$\therefore\ 5^{10} < 2^{30} < 3^{20}$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢ 이다.

14. 임의의 실수 a, b, c 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $|a| = -a$

② $a > b > 0$ 일 때, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 이다.

③ $|a| \geq 0$, $|a| \geq a$, $|a| = |-a|$ 이다.

④ $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

⑤ $|a-b| \geq |a|-|b|$

해설

① $|a| = a(a \geq 0)$

$-a(a < 0)$

② 참

③ 참

④ $(|a+b+c|)^2$

$= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$(|a|+|b|+|c|)^2$

$= a^2+b^2+c^2+2(|a||b|+|b||c|+|c||a|)$

$|a||b| \geq ab,\ |b||c| \geq bc,\ |c||a| \geq ca$

$\therefore |a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

⑤ $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$(|a|-|b|)^2 = a^2-2|a||b|+b^2$ $(\because |a||b| \geq ab)$

$\therefore |a-b| \geq |a|-|b|$

15. 실수 x, y에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \ge \lvert x+y\rvert$	㉡ $\lvert x+y\rvert \ge \lvert x-y\rvert$
㉢ $\lvert x-y\rvert \ge \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$	

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $(\lvert x\rvert + \lvert y\rvert)^2 - \lvert x+y\rvert^2 = 2(\lvert xy\rvert - xy) \ge 0$

$\therefore\ \lvert x\rvert + \lvert y\rvert \ge \lvert x+y\rvert$

㉡ (반례) $x = 1, y = -1$ 일 때

$\lvert 1+(-1)\rvert = 0,\quad \lvert 1-(-1)\rvert = 2$ 이므로

$\lvert x+y\rvert < \lvert x-y\rvert$

㉢ $\lvert x-y\rvert^2 - (\lvert x\rvert - \lvert y\rvert)^2 = 2(\lvert xy\rvert - xy) \ge 0$

$\therefore\ \lvert x-y\rvert \ge \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢ 이다.

16. 모든 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + 2axy + by^2 = 0$ 이 항상 성립하기 위한 실수 a, b 의 조건은?

① $a \le b^2$ ② $b^2 \le a$ ③ $a^2 \le b$

④ $b \le a^2$ ⑤ $a^2 = b$

해설

모든 실수 x 에 대하여

$x^2 + 2axy + by^2 \ge 0$ 이 성립하려면

$D/4 = (ay)^2 - by^2 = (a^2 - b)y^2 \le 0$

이 부등식이 모든 y 에 대하여 성립하려면

$y^2 \ge 0$ 이므로 $a^2 - b \le 0$

$\therefore a^2 \le b$

17. 모든 실수 x, y에 대하여 $x^2+2axy+by^2 \geq 0$이 성립하기 위한 실수 a, b의 조건은?

① $a \leq b^2$ ② $b^2 \leq a$ ③ $a^2 \leq b$

④ $b \leq a^2$ ⑤ $b \leq 4a^2$

해설

$x^2+2axy+by^2 \geq 0$에서 양변을 y^2으로 나누면

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2+2a\left(\frac{x}{y}\right)+b \geq 0$$

모든 실수 x, y에 대해 성립하려면

$$\frac{D}{4}=a^2-b \leq 0$$

$\therefore a^2 \leq b$

18. 다음은 실수 a, b, c 가 모두 양수일 때, $a^3+b^3+c^3-3abc \geq 0$ 임을 보이는 과정이다. [㉮] 안에 들어갈 알맞은 식은?

$$\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3-3abc \\
&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\
&=\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca) \\
&=\frac{1}{2}(a+b+c)(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2) \\
&=\frac{1}{2}(a+b+c)\ [㉮] \geq 0
\end{aligned}$$

① $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

② $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$

③ $(a+b)^2-(b+c)^2-(c+a)^2$

④ $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

⑤ $(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2$

해설

① $\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2\}$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

19. 실수 x, y 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

> ㉠ $x > y$ 이면, $x^2 > y^2$ 이다.
>
> ㉡ $x^2 + y^2 \geq xy$
>
> ㉢ $x > y$ 이면 $x^3 > y^3$ 이다.

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠. (반례) $x = 2,\ y = -3$ 일 때, $4 < 9$ $\quad \therefore$ 거짓

㉡. $x^2 + y^2 - xy = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$

$\therefore x^2 + y^2 \geq xy$

$\therefore$ 참

㉢. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$x - y > 0,\ x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$

$\therefore x^3 - y^3 > 0,\ x^3 > y^3$

$\therefore$ 참

20. 실수 a, b, c, x, y에 대하여 항상 성립하는 부등식(절대부등식)을 다음 [보기] 중에서 고를 때, 옳은 표현의 개수는?

보기

(가) $x^2 - xy + y^2 \geq 0$
(나) $x^2 - x + 1 > 0$
(다) $|a + b| \leq |a| + |b|$
(라) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
(마) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$
(바) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

① 6개 ② 5개 ③ 4개 ④ 3개 ⑤ 2개

해설

(라) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$(단, $a = b$일때 등호성립)
(마) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$(단, $a = b = c$일때 등호성립)