1. 세 점$(-3,\ 1)$, $(5,\ 5)$, $(-2, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형의 외접원의 중심(외심)의 좌표를 구하면?

① $(3,\ -1)$　　② $(2,\ 1)$　　③ $(4,\ 2)$

④ $(-3,\ -2)$　　⑤ $(3,\ -2)$

해설

외접원의 방정식을

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \cdots$ ㉠ 이라 하면,

㉠은 $(-3,\ 1)$, $(5,\ 5)$, $(-2,\ -2)$를 지나므로

$$\begin{cases} 10 - 3A + B + C = 0 \\ 50 + 5A + 5B + C = 0 \\ 8 - 2A - 2B + C = 0 \end{cases}$$

세 식을 연립하여 풀면

$A = -4,\ \ B = -2\ ,\ C = -20$

따라서, 구하는 원은 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

즉, $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ 이고 중심은 $(2,\ 1)$

2. $x^2+y^2+2ax-4ay+4a^2+2a-4=0$이 나타내는 자취의 최소 면적은 ?

① 2π　② 3π　③ 4π　④ 5π　⑤ 6π

해설

준식 $= x^2+2ax+y^2-4ay+4a^2+2a-4=0$

$\rightarrow (x+a)^2+(y-2a)^2=a^2-2a+4$

그러므로 준식은 중심 $(-a,\ 2a)$ 이고

반지름이 $\sqrt{a^2-2a+4}$ 이다.

$\therefore$ 면적 $S=\pi(\sqrt{a^2-2a+4})^2$

$=\pi(a^2-2a+4)=\pi(a-1)^2+3\pi$

$\therefore\ a=1$ 일 때 최소 면적 : 3π

3. 점 $(1,\ 1)$을 지나고, x축과 y축을 동시에 접하는 원은 두 개 존재한다. 이 때, 두 원의 중심거리는 얼마인가?

① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{3}$　③ 2　④ $\sqrt{6}$　⑤ 4

해설

x 축, y 축 동시에 접하는 원 :
$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$
$(1,1)$ 을 지나므로, $(1-a)^2+(1-a)^2=a^2$
$\Rightarrow \quad a^2-4a+2=0$
두 근을 α,β 라 하면,
$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=2$
두 원의 중심거리 :

$$\begin{aligned}\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2} &= \sqrt{2\left\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right\}} \\ &= \sqrt{2(4^2-8)}=4\end{aligned}$$

4. x축과 점$(1,\ 0)$에서 접하면서 y축에 동시에 접하는 원의 넓이를 직선 $y=\frac{1}{3}x+b$가 이등분할 때, $6b$의 값으로 적당한 값을 찾으면?

① 2 ② -3 ③ 4 ④ -5 ⑤ 6

해설

x축과 점$(1,\ 0)$에서 접하면서 y축에 동시에 접하는 원의 방정식은$(x-1)^2+(y-1)^2=1$이다.

원의 넓이를 직선 $y=\frac{1}{3}x+b$가 이등분 하므로 이 직선은 원의 중심인 $(1,1)$을 지나야 한다.

따라서 $b=\frac{2}{3},\ 6b=4$

5. 두 점 A$(-2,\ 0)$, B$(1,\ 0)$ 으로부터의 거리의 비가 $2:1$인 점 P의 자취의 방정식은?

① $x^2+y^2=4$
② $x^2+y^2+4x=0$
③ $x^2+y^2-4x=0$
④ $x^2+y^2+4y=0$
⑤ $x^2+y^2-4y=0$

해설

점 P의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면
$\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$
즉 $4\overline{PB}^2=\overline{PA}^2$ 이므로
$4\left\{(x-1)^2+y^2\right\}=(x+2)^2+y^2$
$3x^2+3y^2-12x=0$
$\therefore\ x^2+y^2-4x=0$

6. 두 원 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$, $x^2+y^2-8x+6y+k=0$ 가 서로 외접할 때 상수 k 의 값은?

① $k=-11$ ② $k=0$ ③ $k=9$
④ $k=16$ ⑤ $k=8$

해설

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y+1=0 \\ x^2+y^2-8x+6y+k=0 \end{cases}$$

$x^2-2x+1+y^2-2y+1=1$

$\rightarrow\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$

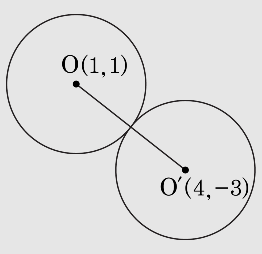
중심 $\mathrm{O}(1,\ 1)$, $r=1$

$x^2-8x+16+y^2+6y+9-25+k=0$

$\rightarrow\ (x-4)^2+(y+3)^2=25-k$

중심 $\mathrm{O}'(4,\ -3)$, $r'=\sqrt{25-k}$

두 원이 외접할 조건은 $\overline{\mathrm{OO}'}=r+r'$ 이므로



$\sqrt{(4-1)^2+(-3-1)^2}=1+\sqrt{25-k}$

$5=1+\sqrt{25-k}$

$4=\sqrt{25-k}$

$16=25-k$

$\therefore\ k=9$

7. $x^2 + y^2 - 4x = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$ 의 교점을 지나는 원의 반지름의 최솟값은?

① $\sqrt{5}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

해설

주어진 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$(x^2 + y^2 - 4x) + k(x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8) = 0$
이 중에서 반지름이 최소인 경우는 공통현을 지름으로 하는 원이다.
결국 구하는 값은 공통현의 길이의 절반을 구하면 된다.
공통현의 방정식은 $x + y - 4 = 0$,
$x^2 + y^2 - 4x = 0$ 의 중심은 $(2,\ 0)$ 반지름은 2 이고,
중심에서 공통현까지의 길이는 $\sqrt{2}$ 이므로
공통현의 길이의 절반은 $\sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$,
구하는 값은 $\sqrt{2}$ 이다.

8. 실수 a, b 와 두 원
A : $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+1$,
B : $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 에 대하여
원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a, b 사이의 관계식은?

① $a+b=-1$
② $a+b=1$
③ $a-b=0$
④ $a^2+b^2=1$
⑤ $(a-1)^2+(b-1)^2=1$

해설

원A 가 원B 의 둘레를 이등분하므로
두 원의 공통현이
원B 의 중심인 (1, 1) 을 지나야 한다.
공통현의 방정식은
$(a-1)x+(b-1)y+1=0 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 (1, 1) 을 지나므로
$(a-1)\times 1+(b-1)\times 1+1=0$
$\therefore a+b=1$

9. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2+y^2-2x+4y+1=0,\quad 3x-4y+6=0$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$(x-1)^2+(y+2)^2=2^2$

따라서, 원의 중심 $(1,-2)$ 에서 직선

$3x-4y+6=0$ 까지의 거리 d 는

$d=\dfrac{|17|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{17}{5}$

이때, $\dfrac{17}{5}>2$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

$\therefore$ 교점의 개수 : 0 개

10. 좌표평면에서 점 $(2, -3)$ 을 중심으로 하고 직선 $3x + 4y - 9 = 0$ 에 접하는 원의 넓이는?

① 4π ② 6π ③ 8π ④ 9π ⑤ 12π

해설

점$(2, -3)$ 에서 직선 $3x + 4y - 9 = 0$ 까지의 거리가 구하는 원의 반지름이므로

$r = \dfrac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{|-15|}{5} = 3$

따라서 원의 넓이는 9π

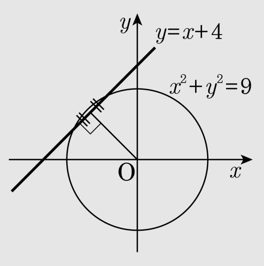
11. 직선 $y = x+4$가 원 $x^2+y^2 = 9$에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x - y + 4 = 0$ 이므로 $\frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을
수직이등분하므로 피타고라스 정리에서 ,
현의 길이는 $2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2$

12. 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=10$ 위의 점 $(-3,\ 4)$ 에서의 접선의 방정식이 $y=mx+n$ 일 때, $3m+n$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(-3,\ 4)$ 을 지나는 방정식 : $y=m(x+3)+4$
원에 접하므로 원 중심에서 직선까지 거리는
반지름과 같다.

$\Rightarrow \quad \dfrac{|m\times(-2)-1\times1+3m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$

$\Rightarrow \quad (m+3)^2=10m^2+10$

$\Rightarrow \quad (3m-1)^2=0,\ m=\dfrac{1}{3}$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{3}x+5 \quad \Rightarrow \quad 3m+n=6$

13. 직선 $3x-y-1=0$ 에 평행하고 원 $x^2+y^2=10$ 에 접하는 접선의 방정식을 $y=mx\pm n$ 이라고 할 때, mn의 값은?

① $3\sqrt{10}$　　② $-3\sqrt{10}$　　③ 30

④ -30　　⑤ $\frac{10}{3}$

해설

접선이 직선 $3x-y-1=0$, 즉 $y=3x-1$에 평행하므로 접선의 기울기는 3이다.
공식을 이용하면 접선의 방정식은
$y=3x\pm\sqrt{10}\sqrt{1+3^2}$, $y=3x\pm 10$ 이므로
$m=3,\ n=10\ \therefore mn=30$

14. 점 $(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3,\ -1)$을 지나고 접선의 기울기를 m이라고 하면
접선은 $y+1=m(x-3)\cdots$①
따라서 원의 중심$(0,0)$에서 직선
$mx-y-3m-1=0$과의 거리가
원의 반지름 $\sqrt{5}$와 같다.
$\dfrac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$, $|-3m-1|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하면
$9m^2+6m+1=5m^2+5$, $4m^2+6m-4=0$
따라서, 기울기 $m=\dfrac{1}{2},-2$
여기서 기울기가 음수인 -2를 ①에 대입하면
$y=-2x+5$
따라서 y절편은 5이다.

15. 점 A(0, a) 에서 원 $x^2+(y-3)^2=8$에 그은 두 접선이 서로 수직 일 때, 양수 a의 값은 ?

① 3　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 10

해설

점 A(0, a) 을 지나고 기울기가 m인 접선을
$y=mx+a$로 놓으면 원의 중심 (0, 3) 에서
접선 $mx-y+a=0$ 까지의 거리는

$$\frac{|a-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

← 반지름 이 식의 양변을 제곱하면,

$(a-3)^2=8(m^2+1)$

$8m^2-a^2+6a-1=0$

m에 관한 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면,
두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta=-1$ 이어야 하므로

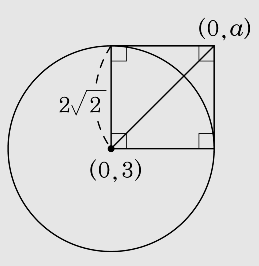
$$\frac{-a^2+6a-1}{8}=-1$$

$a^2-6a-7=0$,　$(a-7)(a+1)=0$

$\therefore\ a=7\ (\because a>0)$

해설

원의 중심 (0, 3) 에서 A(0, a) 까지의
거리는
반지름을 한 변으로 하는 정사각형의 대
각선의 길이와 같다.　$\sqrt{0+(a-3)^2}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$



$a-3=\pm 4$

$\therefore\ a=7$ 또는 $a=-1$

그런데 $a>0$ 에서 $a=7$

16. 원 $x^2+y^2-8y-9=0$ 위의 점 P에서 직선 $3x-4y-24=0$ 까지의 거리의 최솟값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$x^2+y^2-8y-9=0 \Leftrightarrow x^2+(y-4)^2=5^2$ 이므로
원의 중심의 좌표는 $(0,\ 4)$이고, 반지름의 길이는 5이다.
그런데 중심 $(0,\ 4)$ 에서 직선 $3x-4y-24=0$
까지의 거리를 d 라 하면

$$d=\frac{|3\cdot 0-4\cdot 4-24|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{40}{5}=8$$

따라서 구하는 최소 거리는
$d-$ (원의 반지름의 길이)$=8-5=3$

17. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(8, 0)$, $\mathrm{B}(0, 6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

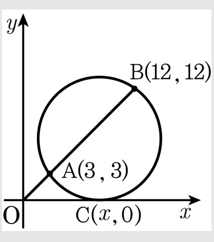
$\angle\mathrm{AOB} = 90°$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.
$\overline{\mathrm{AB}} = 10$ 이고 원의 중심은 $\mathrm{C}(4, 3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$
이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$
$a = -8,\ b = -6,\ c = 0$
$\therefore abc = 0$

18. 좌표평면 위의 두 점 $(3,\ 3)$, $(12,\ 12)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\frac{3}{2}$　② 6　③ $\frac{5}{2}$　④ $6\sqrt{2}$　⑤ $\frac{15}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$x^2 = \sqrt{3^2+3^2} \cdot \sqrt{12^2+12^2} = 72 \quad x = 6\sqrt{2}$

19. 점 $\mathrm{P}(a, 0)$ 에서 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ 에 그은 접선의 길이가 4 일 때, 점 P 의 좌표를 모두 구하면?

① $(1, 0)$, $(7, 0)$ ② $(-1, 0)$, $(7, 0)$ ③ $(1, 0)$, $(-7, 0)$
④ $(-1, 0)$, $(5, 0)$ ⑤ $(1, 0)$, $(-5, 0)$

해설

원의 중심을 $\mathrm{C}(3, 2)$, 접점을 Q 라 하면
$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(a-3)^2+2^2}$
CPQ 는 직각삼각형이므로
$(a-3)^2+4=2^2+4^2$
$a^2-6a-7=0$
$(a+1)(a-7)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=7$
따라서 구하는 점 P 의 좌표는 $(-1, 0)$, $(7, 0)$ 이다.

20. 원 $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$ 과 함수 $y = \frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 $a,\ b,\ c\ ,d$ 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y = \frac{3}{2x}$ 을 $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$ 에 대입하면

$x^2 + \frac{9}{4x^2} = \frac{13}{4}$

$x \neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$4x^4 - 13x^2 + 9 = (x^2 - 1)(4x^2 - 9) = 0$

$\therefore\ x = \pm 1,\ \pm \frac{3}{2}$

따라서 구하는 답은

$4 \times (-1) \times 1 \times \frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} \times 4 = 9$