

1. 세 점(-3, 1), (5, 5), (-2, 2) 를 꼭지점으로 하는 삼각형의 외접원의 중심(외심)의 좌표를 구하면?

① (3, -1)

② (2, 1)

③ (4, 2)

④ (-3, -2)

⑤ (3, -2)

해설

외접원의 방정식을

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \dots \textcircled{1} \text{ 이라 하면,}$$

\textcircled{1}은 (-3, 1), (5, 5), (-2, -2)를 지나므로

$$\begin{cases} 10 - 3A + B + C = 0 \\ 50 + 5A + 5B + C = 0 \\ 8 - 2A - 2B + C = 0 \end{cases}$$

세 식을 연립하여 풀면

$$A = -4, B = -2, C = -20$$

따라서, 구하는 원은 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

즉, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ 이고 중심은 (2, 1)

2. $x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 4a^2 + 2a - 4 = 0$ 이 나타내는 자취의 최소 면적은 ?

① 2π

② 3π

③ 4π

④ 5π

⑤ 6π

해설

$$\text{준식} = x^2 + 2ax + y^2 - 4ay + 4a^2 + 2a - 4 = 0$$

$$\rightarrow (x+a)^2 + (y-2a)^2 = a^2 - 2a + 4$$

그러므로 준식은 중심 $(-a, 2a)$ 이고

반지름이 $\sqrt{a^2 - 2a + 4}$ 이다.

$$\therefore \text{면적 } S = \pi(\sqrt{a^2 - 2a + 4})^2$$

$$= \pi(a^2 - 2a + 4) = \pi(a-1)^2 + 3\pi$$

$\therefore a = 1$ 일 때 최소 면적 : 3π

3. 점 (1, 1)을 지나고, x 축과 y 축을 동시에 접하는 원은 두 개 존재한다.
이 때, 두 원의 중심거리는 얼마인가?

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{3}$

③ 2

④ $\sqrt{6}$

⑤ 4

해설

x 축, y 축 동시에 접하는 원 :

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$$

$$(1,1) \text{ 을 지나므로, } (1-a)^2 + (1-a)^2 = a^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a + 2 = 0$$

두 근을 α, β 라 하면,

$$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 2$$

두 원의 중심거리 :

$$\begin{aligned}\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2} &= \sqrt{2 \{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}} \\ &= \sqrt{2(4^2 - 8)} = 4\end{aligned}$$

4. x 축과 점(1, 0)에서 접하면서 y 축에 동시에 접하는 원의 넓이를 직선 $y = \frac{1}{3}x + b$ 가 이등분할 때, $6b$ 의 값으로 적당한 값을 찾으려면?

① 2

② -3

③ 4

④ -5

⑤ 6

해설

x 축과 점(1, 0)에서 접하면서 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식은 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 이다.

원의 넓이를 직선 $y = \frac{1}{3}x + b$ 가 이등분하므로 이 직선은 원의 중심인 (1, 1)을 지나야 한다.

따라서 $b = \frac{2}{3}$, $6b = 4$

5. 두 점 A(-2, 0), B(1, 0) 으로부터의 거리의 비가 2 : 1인 점 P의 자취의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = 4$

② $x^2 + y^2 + 4x = 0$

③ $x^2 + y^2 - 4x = 0$

④ $x^2 + y^2 + 4y = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 4y = 0$

해설

점 P의 좌표를 P(x, y) 라 하면

$$\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 1$$

즉 $4\overline{PB}^2 = \overline{PA}^2$ 이므로

$$4\{(x-1)^2 + y^2\} = (x+2)^2 + y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 - 12x = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 4x = 0$$

6. 두 원 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x + 6y + k = 0$ 가 서로 외접할 때 상수 k 의 값은?

① $k = -11$

② $k = 0$

③ $k = 9$

④ $k = 16$

⑤ $k = 8$

해설

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 6y + k = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 1$$

$$\rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

중심 $O(1, 1)$, $r = 1$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 - 25 + k = 0$$

$$\rightarrow (x-4)^2 + (y+3)^2 = 25 - k$$

중심 $O'(4, -3)$, $r' = \sqrt{25 - k}$

두 원이 외접할 조건은 $\overline{OO'} = r + r'$

이므로

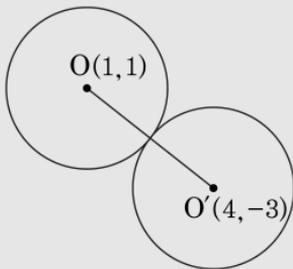
$$\sqrt{(4-1)^2 + (-3-1)^2} = 1 + \sqrt{25 - k}$$

$$5 = 1 + \sqrt{25 - k}$$

$$4 = \sqrt{25 - k}$$

$$16 = 25 - k$$

$$\therefore k = 9$$



7. $x^2 + y^2 - 4x = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$ 의 교점을 지나는 원의 반지름의 최솟값은?

① $\sqrt{5}$

② $\frac{\sqrt{5}}{2}$

③ $\frac{3}{2}$

④ $\sqrt{2}$

⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

해설

주어진 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 4x) + k(x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8) = 0$$

이 중에서 반지름이 최소인 경우는 공통현을 지름으로 하는 원이다.

결국 구하는 값은 공통현의 길이의 절반을 구하면 된다.

공통현의 방정식은 $x + y - 4 = 0$,

$x^2 + y^2 - 4x = 0$ 의 중심은 $(2, 0)$ 반지름은 2 이고,

중심에서 공통현까지의 길이는 $\sqrt{2}$ 이므로

공통현의 길이의 절반은 $\sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$,

구하는 값은 $\sqrt{2}$ 이다.

8. 실수 a, b 와 두 원

$$A : (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 + 1,$$

$B : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 에 대하여

원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a, b 사이의 관계식은?

① $a + b = -1$

② $a + b = 1$

③ $a - b = 0$

④ $a^2 + b^2 = 1$

⑤ $(a-1)^2 + (b-1)^2 = 1$

해설

원A 가 원B 의 둘레를 이등분하므로
두 원의 공통현이
원B 의 중심인 $(1, 1)$ 을 지나야 한다.
공통현의 방정식은

$$(a-1)x + (b-1)y + 1 = 0 \dots\dots \textcircled{7}$$

$\textcircled{7}$ 이 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$(a-1) \times 1 + (b-1) \times 1 + 1 = 0$$

$$\therefore a + b = 1$$

10. 좌표평면에서 점 $(2, -3)$ 을 중심으로 하고 직선 $3x + 4y - 9 = 0$ 에 접하는 원의 넓이는?

① 4π

② 6π

③ 8π

④ 9π

⑤ 12π

해설

점 $(2, -3)$ 에서 직선 $3x + 4y - 9 = 0$ 까지의 거리가 구하는 원의 반지름이므로

$$r = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-15|}{5} = 3$$

따라서 원의 넓이는 9π

11. 직선 $y = x + 4$ 가 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

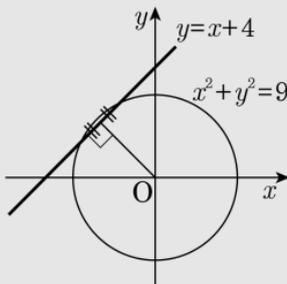
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x - y + 4 = 0$

$$\text{이므로 } \frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분하므로 피타고라스 정리에서,

$$\text{현의 길이는 } 2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2$$

12. 원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 4)$ 에서의 접선의 방정식이 $y = mx + n$ 일 때, $3m + n$ 의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$(-3, 4)$ 을 지나는 방정식 : $y = m(x+3) + 4$
원에 접하므로 원 중심에서 직선까지 거리는
반지름과 같다.

$$\Rightarrow \frac{|m \times (-2) - 1 \times 1 + 3m + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow (m+3)^2 = 10m^2 + 10$$

$$\Rightarrow (3m-1)^2 = 0, m = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{접선의 방정식은 } y = \frac{1}{3}x + 5 \Rightarrow 3m + n = 6$$

13. 직선 $3x - y - 1 = 0$ 에 평행하고 원 $x^2 + y^2 = 10$ 에 접하는 접선의 방정식을 $y = mx \pm n$ 이라고 할 때, mn 의 값은?

① $3\sqrt{10}$

② $-3\sqrt{10}$

③ 30

④ -30

⑤ $\frac{10}{3}$

해설

접선이 직선 $3x - y - 1 = 0$, 즉 $y = 3x - 1$ 에 평행하므로 접선의 기울기는 3이다.

공식을 이용하면 접선의 방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{10} \sqrt{1 + 3^2}, y = 3x \pm 10 \text{ 이므로}$$

$$m = 3, n = 10 \therefore mn = 30$$

14. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3, -1)$ 을 지나고 접선의 기울기를 m 이라고 하면

$$\text{접선은 } y + 1 = m(x - 3) \cdots \textcircled{1}$$

따라서 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선

$$mx - y - 3m - 1 = 0 \text{ 과의 거리가}$$

원의 반지름 $\sqrt{5}$ 와 같다.

$$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}, \quad |-3m - 1| = \sqrt{5} \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$9m^2 + 6m + 1 = 5m^2 + 5, \quad 4m^2 + 6m - 4 = 0$$

$$\text{따라서, 기울기 } m = \frac{1}{2}, -2$$

여기서 기울기가 음수인 -2 를 ①에 대입하면

$$y = -2x + 5$$

따라서 y 절편은 5이다.

15. 점 A(0, a)에서 원 $x^2 + (y - 3)^2 = 8$ 에 그은 두 접선이 서로 수직 일 때, 양수 a의 값은 ?

① 3

② 5

③ 7

④ 9

⑤ 10

해설

점 A(0, a)을 지나고 기울기가 m인 접선을 $y = mx + a$ 로 놓으면 원의 중심 (0, 3)에서 접선 $mx - y + a = 0$ 까지의 거리는

$$\frac{|a - 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

← 반지름 이 식의 양변을 제곱하면,

$$(a - 3)^2 = 8(m^2 + 1)$$

$$8m^2 - a^2 + 6a - 1 = 0$$

m에 관한 이차방정식의 두 근을 α, β 라 하면,

두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta = -1$ 이어야 하므로

$$\frac{-a^2 + 6a - 1}{8} = -1$$

$$a^2 - 6a - 7 = 0, (a - 7)(a + 1) = 0$$

$$\therefore a = 7 (\because a > 0)$$

해설

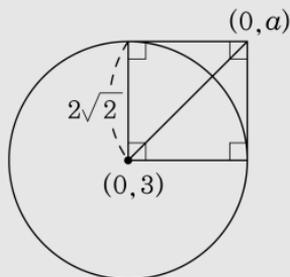
원의 중심 (0, 3)에서 A(0, a)까지의 거리는

반지름을 한 변으로 하는 정사각형의 대각선의 길이와 같다. $\sqrt{0 + (a - 3)^2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

$$a - 3 = \pm 4$$

$$\therefore a = 7 \text{ 또는 } a = -1$$

그런데 $a > 0$ 에서 $a = 7$



16. 원 $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ 위의 점 P에서 직선 $3x - 4y - 24 = 0$ 까지의 거리의 최솟값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 4)^2 = 5^2$ 이므로
원의 중심의 좌표는 $(0, 4)$ 이고, 반지름의 길이는 5이다.
그런데 중심 $(0, 4)$ 에서 직선 $3x - 4y - 24 = 0$
까지의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 4 - 24|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{40}{5} = 8$$

따라서 구하는 최소 거리는

$$d - (\text{원의 반지름의 길이}) = 8 - 5 = 3$$

17. 좌표평면 위의 두 점 $A(8,0)$, $B(0,6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$\angle AOB = 90^\circ$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.

$\overline{AB} = 10$ 이고 원의 중심은 $C(4,3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

$a = -8, b = -6, c = 0$

$\therefore abc = 0$

18. 좌표평면 위의 두 점 $(3, 3)$, $(12, 12)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\frac{3}{2}$

② 6

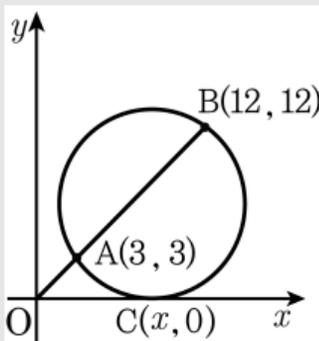
③ $\frac{5}{2}$

④ $6\sqrt{2}$

⑤ $\frac{15}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$$x^2 = \sqrt{3^2 + 3^2} \cdot \sqrt{12^2 + 12^2} = 72 \quad x = 6\sqrt{2}$$

19. 점 $P(a, 0)$ 에서 원 $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ 에 그은 접선의 길이가 4일 때, 점 P 의 좌표를 모두 구하면?

- ① $(1, 0), (7, 0)$ ② $(-1, 0), (7, 0)$ ③ $(1, 0), (-7, 0)$
④ $(-1, 0), (5, 0)$ ⑤ $(1, 0), (-5, 0)$

해설

원의 중심을 $C(3, 2)$, 접점을 Q 라 하면

$$\overline{CP} = \sqrt{(a - 3)^2 + 2^2}$$

CPQ 는 직각삼각형이므로

$$(a - 3)^2 + 4 = 2^2 + 4^2$$

$$a^2 - 6a - 7 = 0$$

$$(a + 1)(a - 7) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 7$$

따라서 구하는 점 P 의 좌표는 $(-1, 0), (7, 0)$ 이다.

20. 원 $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$ 과 함수 $y = \frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 a, b, c, d 라 할 때, $abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$y = \frac{3}{2x}$ 을 $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$ 에 대입하면

$$x^2 + \frac{9}{4x^2} = \frac{13}{4}$$

$x \neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$$4x^4 - 13x^2 + 9 = (x^2 - 1)(4x^2 - 9) = 0$$

$$\therefore x = \pm 1, \pm \frac{3}{2}$$

따라서 구하는 답은

$$4 \times (-1) \times 1 \times \frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} \times 4 = 9$$