

1. a, b 는 정수이고, $ax^3 + bx^2 + 1$ 이 $x^2 - x - 1$ 로 나누어 떨어질 때, b 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

전개했을 때 양변의 최고차항과 상수항이 같아야 하므로

$$ax^3 + bx^2 + 1$$

$$= (x^2 - x - 1)(ax - 1)$$

$$= ax^3 - (1 + a)x^2 + (1 - a)x + 1$$

양변의 계수를 비교하면

$$-(1 + a) = b, 1 - a = 0$$

$$\therefore a = 1, b = -2$$

2. x 에 대한 다항식 $(4x^2 - 3x + 1)^5$ 을 전개하였을 때, 모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

① 0

② 16

③ 32

④ 64

⑤ 1024

해설

$(4x^2 - 3x + 1)^5$ 을 전개하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면 $(4x^2 - 3x + 1)^5 = a_0x^{10} + a_1x^9 + a_2x^8 + \cdots + a_9x + a_{10}$ 과 같이 된다.

여기서 모든 계수들의 합

$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$ 을 구하려면

$x = 1$ 을 대입하면 된다.

즉, $(4 - 3 + 1)^5 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$

모든 계수들의 합은 $2^5 = 32$

3. x 에 관한 삼차식 $x^3 + mx^2 + nx + 1$ 을 $x+1$ 로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$ 로 나누면 나누어떨어진다고 한다. 이 때, $-3(m+n)$ 의 값은?

① 4

② 8

③ 12

④ 14

⑤ 18

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + mx^2 + nx + 1 \\ &= (x+1)Q(x) + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + mx^2 + nx + 1 \\ &= (x-2)Q'(x) \end{aligned}$$

$$\therefore f(-1) = -1 + m - n + 1 = 5$$

$$f(2) = 8 + 4m + 2n + 1 = 0$$

$$\therefore m = \frac{1}{6}, n = -\frac{29}{6}$$

$$\therefore m+n = -\frac{14}{3}, -3(m+n) = 14$$

4. 다항식 $x^4 - 3x^2 + ax + 5$ 를 $x + 2$ 로 나누면 나머지가 3이다. a 의 값은?

① 0

② 2

③ 3

④ -2

⑤ -3

해설

$x^4 - 3x^2 + ax + 5 = f(x)$ 라 놓자.

$f(-2) = 3$ 에서 $-2a + 9 = 3$

$\therefore a = 3$

5. x 에 관계없이 $\frac{x-a}{2x-b}$ 가 항상 일정한 값을 가질 때, 상수 a, b 에 대하여 $\frac{b}{a}$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\frac{x-a}{2x-b} = k \text{라 놓으면,}$$

$$(2k-1)x + (a-bk) = 0$$

$$\therefore 2k-1=0, a=bk \text{이므로}$$

$$k = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{2}b \text{이다.}$$

$$\therefore \frac{b}{a} = 2$$

6. 다항식 $2x^3 + ax^2 + x + b$ 가 $x^2 - x + 1$ 로 나누어떨어질 때, $a - b$ 의 값은?

① -4

② -2

③ 2

④ 3

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & 2x^3 + ax^2 + x + b \\ &= (x^2 - x + 1)(2x + c) \\ &= 2x^3 + (c - 2)x^2 + (2 - c)x + c \\ &\therefore a = c - 2, \quad 1 = 2 - c, \quad b = c \\ &c = 1 \text{ 이므로 } a = -1, b = 1 \\ &\therefore a - b = -2 \end{aligned}$$

7. 다항식 $4x^3 - 2x^2 - 21x + \frac{45}{2}$ 가 $(x-r)^2$ 으로 나누어 떨어질 때, 양수 r 의 값은?

① 1.2

② 1.5

③ 1.8

④ 2.1

⑤ 2.4

해설

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 21x + \frac{45}{2} \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-r)^2(4x-\alpha) \\ &= (x^2 - 2rx + r^2)(4x - \alpha) \\ &= 4x^3 - (\alpha + 8r)x^2 + (4r^2 + 2r\alpha)x - r^2\alpha \end{aligned}$$

①과 계수비교를 하면

$$\alpha + 8r = 2 \cdots \textcircled{2}, \quad 4r^2 + 2r\alpha = -21 \cdots \textcircled{3}$$

②에서 $\alpha = 2 - 8r$,

③에 대입하면

$$4r^2 + 2r(2 - 8r) = -21$$

$$12r^2 - 4r - 21 = 0, \quad (2r - 3)(6r + 7) = 0$$

$$\therefore r = \frac{3}{2} \quad (\because r > 0)$$

8. 등식 $x^3 + ax^2 + 2x + b = (x^2 + x + 1)Q(x) + 2x + 1$ 이 x 에 대한 항등식일 때, $a + b$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$Q(x) = x + c$ 라고 두고 전개하여 계수를 비교하면
 $a = 0, b = 0, c = -1$ 이므로 $a + b = 0$

해설

$x^3 + ax^2 + 2x + b$ 를 $x^2 + x + 1$ 로 직접 나눗셈을 하면,

$$\begin{array}{r}
 x + (a-1) \\
 x^2 + x + 1 \overline{) x^3 + ax^2 + 2x + b} \\
 \underline{-(x^3 + x^2 + x)} \\
 (a-1)x^2 + x + b \\
 \underline{-(a-1)x^2 + (a-1)x + (a-1)} \\
 (2-a)x + b - a + 1
 \end{array}$$

$$2 - a = 2, b - a + 1 = 1$$

$$a = 0, b = 0$$

9. 이차 이상의 다항식 $p(x)$ 를 $x - 2007$ 와 $x - 2008$ 으로 나눈 나머지는 각각 2007와 2008이다. $p(x)$ 를 $(x - 2007)(x - 2008)$ 으로 나눈 나머지는?

① 2007×2008

② $2007x$

③ $2008x$

④ $x - 2007 \times 2008$

⑤ x

해설

$p(x)$ 를 $(x - 2007)(x - 2008)$ 으로 나눌 때의 몫과 나머지를 각각 $q(x)$ 와 $ax + b$ 라 놓으면

$$p(x) = (x - 2007)(x - 2008)q(x) + ax + b \cdots \cdots \text{㉠}$$

나머지정리에 의해

$$p(2007) = 2007, \quad p(2008) = 2008 \text{ 이므로}$$

㉠의 x 에 2007와 2008을 대입하면

$$2007a + b = 2007, \quad 2008a + b = 2008$$

$$\therefore a = 1, \quad b = 0$$

그러므로 구하는 나머지는 x

10. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 4$ 로 나누었을 때의 나머지가 $-x + 4$ 이다. 다항식 $f(x+1)$ 을 $x^2 + 2x - 3$ 으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x + 1$

② $-x + 3$

③ $x - 1$

④ $2x$

⑤ $2x - 3$

해설

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^2 - 4)P(x) - x + 4 \\&= (x + 2)(x - 2)P(x) - x + 4\end{aligned}$$

$$\therefore f(-2) = 6, f(2) = 2$$

$$\begin{aligned}f(x+1) &= (x^2 + 2x - 3)Q(x) + ax + b \\&= (x + 3)(x - 1)Q(x) + ax + b\end{aligned}$$

$$x = -3 \text{을 대입하면 } f(-2) = -3a + b = 6$$

$$x = 1 \text{을 대입하면 } f(2) = a + b = 2$$

$$\therefore a = -1, b = 3$$

따라서 나머지는 $-x + 3$

11. 등식 $3x^3 - x + 2 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 가 x 에 관한 항등식이 되도록 상수 a, b, c, d 의 값을 정하면?

① $a = 3, b = 7, c = -4, d = 4$

② $a = 3, b = 9, c = 8, d = 4$

③ $a = 2, b = 9, c = 6, d = 4$

④ $a = 1, b = 3, c = 8, d = 4$

⑤ $a = 2, b = -9, c = 6, d = 4$

해설

1	3	0	-1	2	
		3	3	2	
1	3	3	2	4	← d
		3	6		
1	3	6	8		← c
		3			
	3	9			← b
	↑				
	a				

$\therefore a = 3, b = 9, c = 8, d = 4$

해설

(i) $x - 1 = y$ 로 놓으면 $x = y + 1$ 이므로

$$3(y+1)^3 - (y+1) + 2 = ay^3 + by^2 + cy + d$$

$$\therefore 3y^3 + 9y^2 + 8y + 4 = ay^3 + by^2 + cy + d$$

$$\therefore a = 3, b = 9, c = 8, d = 4$$

(ii) x 대신 $-1, 0, 1, 2$ 를 대입하면,

$$x = 0 \text{ 대입 : } 2 = -a + b - c + d \cdots \textcircled{1}$$

$$x = -1 \text{ 대입 : } 0 = -8a + 4b - 2c + d \cdots \textcircled{2}$$

$$x = 1 \text{ 대입 : } 4 = d \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$x = 2 \text{ 대입 : } 24 = a + b + c + d \cdots \textcircled{4}$$

①, ②, ③, ④를 연립하여 풀면,

$$\therefore a = 3, b = 9, c = 8, d = 4$$

12. 등식 $\frac{2x^2 + 13x}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$ 가 x 에 대한 항등식이 되도록 상수 A, B, C 의 값을 정할 때, $A + B + C$ 의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

양변에 $(x+2)(x-1)^2$ 을 곱하면

$2x^2 + 13x = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2$ 에서

$x = 1, -2, 0$ 을 차례로 대입하여 A, B, C 를 구하면

$B = 5, C = -2, A = 4$

$\therefore A + B + C = 7$

13. $x + y + 2z = 1$, $2x - y + z = 5$ 를 만족하는 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 6$ 이 성립할 때, $3a + 2b + c$ 의 값은 얼마인가?

① 12

② 8

③ 4

④ 0

⑤ -2

해설

$$x + y + 2z = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$2x - y + z = 5 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}: x + z = 2 \Rightarrow z = 2 - x$$

$$\textcircled{2} \times 2 - \textcircled{1}: x - y = 3 \Rightarrow y = x - 3$$

$$\therefore ax^2 + by^2 + cz^2 = 6$$

$$\Rightarrow ax^2 + b(x - 3)^2 + c(2 - x)^2$$

$$= (a + b + c)x^2 - (4c + 6b)x + 9b + 4c = 6$$

모든 실수 x, y, z 에 대해 성립하려면

$$a + b + c = 0, \quad 4c + 6b = 0, \quad 9b + 4c = 6$$

$$\text{위의 식을 연립하여 풀면, } a = 1, \quad b = 2, \quad c = -3$$

$$\therefore 3a + 2b + c = 4$$

14. x 에 관한 3차 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 2, $x+1$ 로 나눈 나머지가 4라고 한다. $f(x)$ 에서 x^2 의 계수를 a , 상수항을 b 라 하면 $a+b$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$f(x) = px^3 + ax^2 + qx + b$ 라 하면

$f(1) = 2, f(-1) = 4$ 에서

$$p + a + q + b = 2 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$-p + a - q + b = 4 \cdots \textcircled{㉡}$$

① + ②를 하면

$$2(a+b) = 6, a+b = 3$$

15. $x - 1$ 로 나누면 나머지가 3, $x - 2$ 로 나누면 나머지가 7, $x - 3$ 으로 나누면 나머지가 13이 되는 가장 낮은 차수의 다항식을 $f(x)$ 라 할 때, $f(-3)$ 의 값은?

① 7

② 10

③ 11

④ 12

⑤ 13

해설

$$f(x) = k(x-1)(x-2)(x-3) + ax^2 + bx + c$$

$$f(1) = a + b + c = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(2) = 4a + 2b + c = 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$f(3) = 9a + 3b + c = 13 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = 1, c = 1$$

$f(x)$ 가 가장 낮은 차수가 되려면 $k = 0$

$$\therefore f(x) = x^2 + x + 1,$$

$$f(-3) = (-3)^2 + (-3) + 1 = 7$$

16. 모든 실수 x 에 대하여 $(x-1)^{10} = a_0x^{10} + a_1x^9 + a_2x^8 + \cdots + a_{10}$ 이 성립할 때, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$ 의 값은? (단, a_i 는 상수, $i = 0, 1, 2, \dots, 10$)

① -2^{10}

② -2^9

③ 2^9

④ 2^{10}

⑤ 2^{55}

해설

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0 \cdots \textcircled{1}$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{10} = 2^{10} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{하면 } 2(a_1 + a_3 + \cdots + a_9) = -2^{10}$$

$$\therefore a_1 + a_3 + \cdots + a_9 = -2^9$$

17. 10차 다항식 $P(x)$ 가 $P(k) = \frac{k}{k+1}$ (단, $k = 0, 1, 2, \dots, 10$)을 만족시킬 때, $P(11)$ 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{5}{6}$

⑤ 1

해설

$$P(k) = \frac{k}{k+1} \Rightarrow (k+1)P(k) - k = 0$$

$$f(x) = (x+1)P(x) - x \text{라 하면}$$

$$f(x) \text{ 는 } f(0) = f(1) = f(2) = \dots$$

$$= f(10) = 0 \text{인 다항식이다.}$$

$$\therefore f(x) = ax(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$$

$$\text{또, } f(-1) = 1 = a(-1)(-2)\cdots(-11)$$

$$= -a \cdot 11! \text{ (단, } 11! = 1 \times 2 \times \cdots \times 11)$$

$$\therefore a = -\frac{1}{11!}$$

$$f(11) = 12P(11) - 11$$

$$= -\frac{1}{11!} \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdots 1 = -1$$

$$\therefore P(11) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

18. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -2 이다. 다항식 $xf(x)$ 를 $x - \frac{1}{2}$ 로 나눈 몫과 나머지를 차례로 적은 것은?

① $2xQ(x) - 2, -1$

② $2xQ(x) - 1, -1$

③ $\frac{1}{2}xQ(x) - 2, 1$

④ $\frac{1}{2}xQ(x) - 1, 1$

⑤ $\frac{1}{2}xQ(x) + 1, 2$

해설

$$f(x) = (2x - 1)Q(x) - 2$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)2Q(x) - 2$$

$$xf(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)2xQ(x) - 2x$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)2xQ(x) - 2\left(x - \frac{1}{2}\right) - 1$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)\{2xQ(x) - 2\} - 1$$

19. 모든 실수 x 에 대하여 $P(x^2+1) = \{P(x)\}^2 + 1$, $P(0) = 0$ 을 만족한다.
2차 이하의 다항식 $P(x)$ 의 계수의 합은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 무수히 많다.

해설

$P(x) = ax^2 + bx + c$ 라 하면

$P(0) = 0$ 에서 $c = 0 \therefore P(x) = ax^2 + bx$

$P(x^2+1) = \{P(x)\}^2 + 1$ 이므로

$a(x^2+1)^2 + b(x^2+1) = (ax^2+bx)^2 + 1$

$ax^4 + 2ax^2 + a + bx^2 + b = a^2x^4 + 2abx^3 + b^2x^2 + 1$

양변의 계수를 비교하면

$a = a^2$, $2ab = 0$, $2a + b = b^2$, $a + b = 1$

$a^2 = a$ 와 $a + b = 1$ 에서

$(a, b) = (0, 1), (1, 0)$ 이 되는데

이 중 $(1, 0)$ 은 $2a + b = b^2$ 을 만족하지 않으므로 $(a, b) = (0, 1)$

즉, $P(x) = x$ 뿐이다.

$\therefore$ 계수의 합은 1

해설

$P(x^2+1) = \{P(x)\}^2 + 1$ 에서 $x = 0$ 을 대입하면

$P(1) = \{P(0)\}^2 + 1$ 이 된다.

$P(1) = 1$ ($\therefore$ 모든 계수의 합은 $x = 1$ 대입)

20. $x + y + z = 0$, $2x - y - 7z = 3$ 을 동시에 만족시키는 x, y, z 에 대하여 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 이 성립할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 11

② 8

③ 7

④ 6

⑤ 4

해설

(i) $x + y + z = 0$, $2x - y - 7z = 3$ 에서

x, y 를 z 에 대하여 나타내면

$$x = 2z + 1, y = -3z - 1$$

(ii) $x = 2z + 1$, $y = -3z - 1$ 을 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 에 대입하여 정리하면

$$(4a + 9b + c)z^2 + 2(2a + 3b)z + (a + b - 1) = 0$$

$$\therefore 4a + 9b + c = 0, 2a + 3b = 0, a + b - 1 = 0$$

$$\therefore a = 3, b = -2, c = 6$$

$$\therefore a + b + c = 7$$