

1. 집합 $A = \{(x, y) | ax - by = 12\}$ 에 대하여 $(6, 2) \in A$, $(-3, -2) \in A$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 12

② 16

③ 20

④ 26

⑤ 30

해설

$(6, 2) \in A$ 이므로 $x = 6, y = 2$
 $6a - 2b = 12, 3a - b = 6 \cdots \textcircled{1}$
 $(-3, -2) \in A$ 이므로 $x = -3, y = -2$
 $-3a + 2b = 12 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하면 $b = 18$
 $\textcircled{1}$ 에서 $3a - 18 = 6 \therefore a = 8$
 $\therefore a + b = 26$

2. 다음 중 옳은 것은?

① $n(\emptyset) = 1$

② $A = \{2\}$ 이면 $n(A) = 2$

③ $n(\{1, 2, 3\}) - n(\{1, 2\}) = 3$

④ $A = \{4, 6\}$, $B = \{6, 7, 8\}$ 일 때, $n(A) + n(B) = 4$

⑤ $A = \{x \mid 2 \times x = 12, x \text{는 짝수}\}$ 일 때, $n(A) = 1$

해설

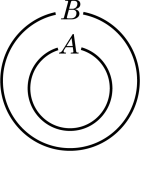
① $n(\emptyset) = 0$

② $n(A) = 1$

③ $3 - 2 = 1$

④ $n(A) + n(B) = 2 + 3 = 5$

3. 집합 $A = \{1, 2, 4\}$ 일 때, 다음 중 벤 다이어그램을 만족하는 집합 B 가 될 수 없는 것은?



- ① $B = \{x|x \text{는 } 10 \text{보다 작은 자연수}\}$
- ② $B = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- ③ $B = \{x|x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$
- ④ $B = \{x|x \text{는 자연수}\}$
- ⑤ $B = \{x|x \text{는 짝수}\}$

해설

주어진 벤 다이어그램은 $A \subset B$ 를 나타내므로 집합 B 는 1, 2, 4 를 반드시 원소로 가져야 한다.

- ① $B = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$
- ② $B = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- ③ $B = \{1, 2, 4, 8\}$
- ④ $B = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- ⑤ $1 \notin B = \{2, 4, 6, \dots\}$

4. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $A \subset B$ 이다. 다음 중 $A \subset C$ 가 되는 경우가 아닌 것은?
- ① $A = \emptyset, C = \emptyset$
 - ② $B = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}, C = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$
 - ③ $B = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 큰 짝수}\}, C = \{x \mid x \text{는 짝수}\}$
 - ④ $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 배수}\}, C = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 배수}\}$
 - ⑤ $A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{1, 3, 5, 7\}$

해설

$A \subset B$ 이므로, $B \subset C$ 일 때, $A \subset C$ 의 포함 관계가 성립한다.

- ① $A = \emptyset, C = \emptyset$ 이므로 $A \subset C$
- ② $B = \{1, 2, 3, 6\}, C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로 $B \subset C$
- ③ $B = \{12, 14, 16, \dots\}, C = \{2, 4, 6, \dots\}$ 이므로 $B \subset C$
- ④ $A = \{12, 24, \dots\}, C = \{6, 12, 18, \dots\}$ 이므로 $A \subset C$
- ⑤ $A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{1, 3, 5, 7\}$ 이므로 $A \subset B, A \not\subset C$

5. 다음 중 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 인 것은?

- ① $A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 2, 6\}$
- ② $A = \emptyset, B = \{x \mid x \text{는 } 1 \text{ 이하의 자연수}\}$
- ③ $A = \{3, 4, 5\}, B = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{보다 크고 } 5 \text{보다 작은 자연수}\}$
- ④ $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 작은 홀수}\},$
 $B = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 홀수}\}$
- ⑤ $A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{의 약수}\}, B = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 미만의 } 5 \text{의 배수}\}$

해설

$A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.

따라서 보기 중 집합 A 와 집합 B 가 같은 것을 찾으면

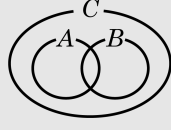
④ $A = B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 이다.

6. 세 집합 A, B, C 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $(A \cap B) \subset (A \cup B)$
- ② $A \cup (A \cap B) = A$
- ③ $(A \cup C) \cap (B \cup C) = A \cap B$
- ④ $A \cap (A \cup B) = A$
- ⑤ $A \subset C$ 이고 $B \subset C$ 이면 $(A \cup B) \subset C$

해설

- ① $A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$ 이므로 $(A \cap B) \subset (A \cup B) \therefore$ 참
- ② $(A \cap B) \subset A$ 이므로 $A \cup (A \cap B) = A \therefore$ 참
- ③ $(A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C = A \cap B \therefore$ 거짓
- ④ $A \subset (A \cup B)$ 이므로 $A \cap (A \cup B) = A \therefore$ 참
- ⑤ 벤 다이어그램으로부터 $(A \cup B) \subset C \therefore$ 참



8. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때, $X \subset A$, $A - X = \{1, 4\}$ 를 만족하는 집합 X 의 진부분집합의 개수는 몇 개인가?

① 6 개 ② 7 개 ③ 8 개 ④ 9 개 ⑤ 10 개

해설

$A - X = \{1, 4\}$ 이므로 $X = \{2, 3, 5\}$
 $\therefore 2^3 - 1 = 7(\text{개})$

9. 집합 $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 4, 6 을 반드시 포함하는 부분집합의 개수가 64 개일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로 원소 4, 6 을 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 2^{n-2} (개) 이다.

$$2^{n-2} = 64, \quad 2^{n-2} = 2^6$$

$$n - 2 = 6 \text{ 이므로 } n = 8$$

10. 두 집합 $A = \{3, 5, a + 4, 9\}$, $B = \{1, 3, 6, b + 1\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{3, 7\}$ 일 때,
 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 31

해설

$A \cap B = \{3, 7\}$ 이므로 $7 \in A$ 이다. $a + 4 = 7$ 이어야 한다.
그러므로 $a = 3$ 이다.

$7 \in B$ 이므로 $b + 1 = 7$ 이어야 한다. 그러므로 $b = 6$ 이다.

$A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$ 이므로 모든 원소의 합은 $1 + 3 + 5 + 6 + 7 + 9 = 31$ 이 된다.

11. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 가 $A = \{x \mid f(x) = 0\}$, $B = \{x \mid g(x) = 0\}$, $C = \{x \mid h(x) = 0\}$ 일 때, 명제 ‘ $f(x) \neq 0$ 이고 ($g(x) = 0$ 또는 $h(x) = 0$)’의 부정의 진리집합을 A, B, C 로 나타내면?

- ① $A^c \cap (B \cup C)^c$ ② $A^c \cap (B \cap C)^c$ ③ $A \cap (B \cup C)^c$
④ $A \cup (B \cup C)^c$ ⑤ $A \cup (B^c \cup C^c)$

해설

명제의 동치 관계를 이용해 보자.

$$\sim [f(x) \neq 0 \text{ 이고 } (g(x) = 0 \text{ 또는 } h(x) = 0)]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ 또는 } \sim [g(x) = 0 \text{ 또는 } h(x) = 0]$$

$$\Leftrightarrow f(x) \text{ 또는 } [g(x) \neq 0 \text{ 이고 } h(x) \neq 0]$$

$$\Leftrightarrow A \cup (B^c \cap C^c)$$

$$\Leftrightarrow A \cup (B \cup C)^c$$

12. 두 조건 $p : |x - 2| \leq h$, $q : |x + 1| \leq 7$ 에 대하여 ‘ p 이면 q 이다.’가 참이 되도록 하는 h 의 최댓값을 구하여라. (단, $h \geq 0$)

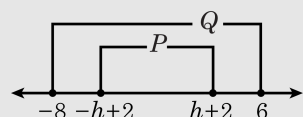
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$p : 2 - h \leq x \leq 2 + h$$

$$q : -8 \leq x \leq 6$$



$$-h + 2 \geq -8 \Leftrightarrow h \leq 10, h + 2 \leq 6 \Leftrightarrow h \leq 4$$

$$\therefore h \leq 4$$

$$\therefore n \text{의 최댓값은 } 4$$

13. 실수 x 에 대하여 다음 명제가 참일 때, a 의 최솟값을 구하여라.

$$x > a \text{이면 } |x - 2| > 4$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

주어진 명제가 참이므로
대우 ‘ $|x - 2| \leq 4$ 이면 $x \leq a$ 이다.’ 가 참이다.
 $|x - 2| \leq 4$ 에서
 $-4 \leq x - 2 \leq 4, -2 \leq x \leq 6$ 이므로
 $\therefore a \geq 6$
따라서 a 의 최솟값은 6이다.

14. 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

- ①

$p \rightarrow r$
- ②

$\sim q \rightarrow p$
- ③

$p \rightarrow \sim q$
- ④

$r \rightarrow q$
- ⑤

$r \rightarrow \sim q$

해설

$$p \rightarrow q(T) \Rightarrow \sim q \rightarrow \sim p(T)$$
$$\sim r \rightarrow \sim q(T) \Rightarrow q \rightarrow r(T)$$
$$\therefore p \rightarrow q \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow r(T)$$

15. 다음 중 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 실수이다.)

- ㉠ $p : a^2 + b^2 = 0, q : ab = 0$

㉡ $p : (a - b)(b - c) = 0, q : a = b = c$

㉢ $p : a > b$ 이고 $b > c, q : a > c$

- ① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $p : a^2 + b^2 = 0$ 에서 $a = b = 0$ 이고, $q : ab = 0$ 에서 $a = 0$ 또는 $b = 0$ 이므로 $p \Rightarrow q, q \nRightarrow p$ 이다.

㉡ $p : (a - b)(b - c) = 0$ 에서 $a = b$ 또는 $b = c$ 이고 $q : a = b = c$ 이므로 $p \nRightarrow q, q \Rightarrow p$ 이다.

㉢ $p \Rightarrow q, q \nRightarrow p$ 이다.

16. 두 실수 a, b 에 대하여 두 등식 $a + b = |a + b|$, $|a + b| = |a| + |b|$ 가 성립할 필요충분조건을 구하면?

① $a + b \geq 0$

② $a \geq 0$ 이고 $b \geq 0$

③ $a \geq 0$ 또는 $b \geq 0$

④ $ab \geq 0$

⑤ $ab \leq 0$

해설

$$a + b = |a + b|, |a + b| = |a| + |b| \Rightarrow a + b = |a| + |b|$$

$$\therefore a \geq 0 \text{이고 } b \geq 0$$

17. $x < 2$ 는 $x \leq a$ 이기 위한 필요조건, $x > b$ 는 $x > 6$ 이기 위한 충분조건이 되도록 정수 a, b 를 정할 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하면?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

필요조건, 즉 $x \leq a$ 가 $x < 2$ 에 포함되어야 하므로 a 의 최댓값은 1 이고 $x > b$ 는 $x > 6$ 에 포함되어야 하므로 b 의 최솟값은 6 이다.

$$\therefore 1 + 6 = 7$$

18. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 충분조건, r 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 s 이기 위한 어떤 조건인지 써라.

▶ 답: 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$
 q 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow q$
 q 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow s$
 r 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow r$
 $s \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $s \Rightarrow p$
 그러나 $p \Rightarrow s$ 인지는 알 수 없다.
 $\therefore p$ 는 s 이기 위한 필요조건이다.

19. 다음 부등식 중 성립하지 않는 것은? (단, 모든 문자는 실수)

① $|a| + |b| \geq |a + b|$

② $a \geq b > 0$ 일 때 $\frac{b}{2+a} \geq \frac{a}{2+b}$

③ $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc (a > 0, b > 0, c > 0)$

④ $\sqrt{3} + \sqrt{13} > \sqrt{2} + \sqrt{14}$

⑤ $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

해설

$$\begin{aligned}\frac{b}{2+a} - \frac{a}{2+b} &= \frac{2b + b^2 - 2a - a^2}{(2+a)(2+b)} \\ &= \frac{b^2 - a^2 + 2(b-a)}{(2+a)(2+b)} \\ &= \frac{(b-a)(a+b+2)}{(a+2)(b+2)} \text{여기서}\end{aligned}$$

$(a+2)(b+2) > 0$ 이고

$(b-a) \leq 0, a+b+2 > 0$ 이므로

$(\because a \geq b > 0)$

$$\frac{b}{2+a} - \frac{a}{2+b} \leq 0$$

$$\therefore \frac{b}{2+a} \leq \frac{a}{2+b}$$

20. 부등식 $7^{20} < n^{10}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

$$\frac{7^{20}}{n^{10}} = \frac{(7^2)^{10}}{n^{10}} = \left(\frac{49}{n}\right)^{10} < 1$$

$$\frac{49}{n} < 1 \text{ 이므로 } n > 49$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 50 이다.

21. 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 \geq -ab$ 임을 증명한 것이다. $[가]$, $[나]$ 에 들어갈 알맞은 부등호로 짝지어진 것은?

$$\begin{aligned} A &= a^2 + b^2, \quad B = -ab \\ A - B &= a^2 + b^2 - (-ab) \\ &= a^2 + b^2 + ab \\ &= a^2 + ab + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2 \\ &= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$ 이므로 $A \geq B$ 이다. 즉, $a^2 + b^2 \geq -ab$ (단 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립)

- ① $>, \geq$
- ② $\geq, \geq$
- ③ $>, >$
- ④ $<, \geq$
- ⑤ $\leq, \leq$

해설

$$\begin{aligned} A &= a^2 + b^2, \quad B = -ab \\ A - B &= a^2 + b^2 - (-ab) \\ &= a^2 + b^2 + ab \\ &= a^2 + ab + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2 \\ &= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(a, b 가 실수이므로)
 $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0, \frac{3}{4}b^2 \geq 0$

따라서 $A - B \geq 0$ 이므로 $A \geq B$ 이다.
즉, $a^2 + b^2 \geq -ab$ (단 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립)

22. 양수 x, y 에 대하여 $\left(x + \frac{3}{y}\right)\left(3y + \frac{1}{x}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계에 의해

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 3xy + 1 + 9 + \frac{3}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{3xy \cdot \frac{3}{xy}} + 10 \\ &= 2 \cdot 3 + 10 = 16\end{aligned}$$

23. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

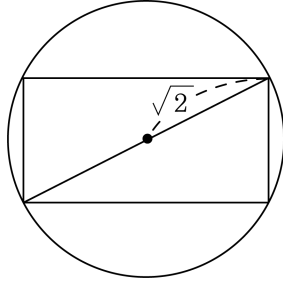
해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{b}{a} \times \frac{c}{b} \times \frac{a}{c}} = 3$$

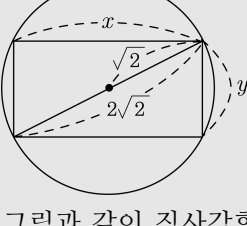
$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3$$

24. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설



그림과 같이 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 $x, y(x > 0, y > 0)$ 라고 하면
 $x^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$
직사각형의 둘레의 길이는 $2x + 2y$ 이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(2x + 2y)^2 \leq (2^2 + 2^2)(x^2 + y^2) = 8 \times 8 = 64$ (단, 등호는 $x = y$ 일 때 성립)
 $\therefore -8 \leq 2x + 2y \leq 8$
따라서 구하는 최댓값은 8이다.

25. 다음 보기 중 $X = \{-1, 1, 2\}$ 에서 $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ $f : x \rightarrow |x|^2$

㉡ $g : x \rightarrow x + 2$

㉢ $h : x \rightarrow |x| + 1$

㉣ $i : x \rightarrow x^2 - 1$

㉤ $j : x \rightarrow |x| + 3$

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ $f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$

$f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$

$f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$

㉡ $g(-1) = -1 + 2 = 1 \in Y$

$g(1) = 1 + 2 = 3 \in Y$

$g(2) = 2 + 2 = 4 \in Y$

㉢ $h(-1) = |-1| + 1 = 2 \in Y$

$h(1) = |1| + 1 = 2 \in Y$

$h(2) = |2| + 1 = 3 \in Y$

㉣ $i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$

㉤ $j(2) = 5 \notin Y$

그러므로 ㉠, ㉡은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

26. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, $g(x) = -2$ 일 때, $f(4) + g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로
 $f(x) = x$ 에서 $f(4) = 4$,
 $g(x) = -2$ 에서 $g(-1) = -2$
 $\therefore f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

27. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ 에서 함수 f 를 $f(x) = (x^2 \text{을 } 4 \text{로 나눈 나머지})$ 로 정의하고
집합 $B = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ 에서 함수 g 를 $g(x) = (x^2 \text{을 } 8 \text{로 나눈 나머지})$ 로 정의하자.
두 함수 f, g 의 치역을 각각 P, Q 라고 할 때, 집합 $P \cup Q$ 는?

- ① $\{0, 1\}$ ② $\{0, 4\}$ ③ $\{0, 1, 4\}$
④ $\{0, 2, 4\}$ ⑤ $\{1, 2, 4\}$

해설

- (i) 집합 A 의 원소 x 를 $x = 2k - 1$
(단, $k = 1, 2, 3, \dots$)로 놓으면
 $x^2 = (2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4(k^2 - k) + 1$ 이므로 x^2 을 4로 나눈 나머지는 1이다.
 $\therefore P = \{1\}$
- (ii) 집합 B 의 원소 x 중 0, 4, 8, 12, $\dots$ 은 $x = 4k$ (단, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$)로 나타내고
2, 6, 10, $\dots$ 은 $x = 4k - 2$
(단, $k = 1, 2, 3, \dots$)로 놓자.
먼저 $x = 4k$ 일 때,
 $x^2 = (4k)^2 = 16k^2 = 8(2k^2)$ 이므로
 x^2 을 8로 나눈 나머지는 0이다.
또, $x = 4k - 2$ 일 때,
 $x^2 = (4k - 2)^2$
 $= 16k^2 - 16k + 4$
 $= 8(2k^2 - 2k) + 4$ 이므로
 x^2 을 8로 나눈 나머지는 4이다.
 $\therefore Q = \{0, 4\}$
- (i), (ii)로부터 $P \cup Q = \{0, 1, 4\}$

28. 집합 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 일차함수 $f(x) = ax + b$ 의 정의역과 치역이 일치할 때, 두 실수 a 와 b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

- 1) $a > 0$ 일 때 $f(-1) = -1$, $f(3) = 3$ 을 만족
 $-a + b = -1$, $3a + b = 3$
따라서 $a = 1$, $b = 0$
- 2) $a < 0$ 일 때 $f(-1) = 3$, $f(3) = -1$
 $-a + b = 3$, $3a + b = -1$
따라서 $a = -1$, $b = 2$
- 1), 2)에서 $a > 0$ 일 때 $a + b = 1 + 0 = 1$
 $a < 0$ 일 때 $a + b = -1 + 2 = 1$
즉 $a + b = 1$

29. 함수 f 의 정의역이 $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ 이고,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \in Q) \\ 1 & (x \notin Q) \end{cases} \text{이라고 한다. 위 함수의 그래프에 대한 설명 중}$$

맞는 것은?(Q 는 유리수 전체의 집합)

- ① 부등식 $y \geq x(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 없다.
- ② 부등식 $y \geq x(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 1 개이다
- ③ 부등식 $y \geq x(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 무수히 많다.
- ④ 부등식 $y < x(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 없다.
- ⑤ 부등식 $y < x(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 1 개이다.

해설

함수 f 의 그래프를 그리면 y 값이 0, 1 인 점이 조밀하게 평면 위에 있다.

따라서 부등식 $y \geq x, y < x$ 의 영역 안에도 무수히 많다

30. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x + 12)$ 를 만족시키고 $f(1) = 3$ 일 때, $f(13) + f(37) - f(25)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$f(13) = f(1 + 12) = f(1)$$

$$f(25) = f(13 + 12) = f(13) = f(1)$$

$$f(37) = f(25 + 12) = f(25) = f(1)$$

$$\text{따라서 준식은 } f(1) + f(1) - f(1) = f(1) = 3$$

31. 함수 $f(x)$ 가 임의의 실수 x, y 에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 이고 $f(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $f(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

임의의 실수 x, y 에 대하여

$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 가 성립하므로,

$x = 1, y = 0$ 을 대입하면

$$f(1)f(0) = f(1) + f(1)$$

$$\therefore f(0) = f(1) + f(1) = 2$$

32. 모든 양수 m, n 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 항상 $f(mn) = f(m) + f(n)$ 만족한다.

$f(2) = a, f(3) = b$ 일 때 $f(24)$ 를 a, b 를 써서 나타내면?

① $a + 2b$

② $2a + b$

③ $2a + 3b$

④ $3a + b$

⑤ $3a + 2b$

해설

$$f(24) = f(2^3 \cdot 3) = f(2^3) + f(3)$$

$$f(2^3) = f(2^2 \cdot 2) = f(2^2) + f(2)$$

$$= \{f(2) + f(2)\} + f(2) = 3f(2)$$

$$\text{따라서 } 3f(2) + f(3) = 3a + b$$

33. 0 이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

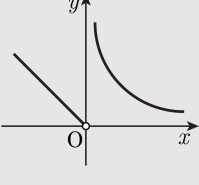
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x > 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases} \quad \text{일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?}$$

- I . $f(f(3)) + f(f(-3)) = \frac{10}{3}$
II . $f(-x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$
III . $x_1 > x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.

- ① I ② III ③ I , II ④ II , III ⑤ I , III

해설

$y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



I . $f(f(3)) + f(f(-3)) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f(3)$
 $= 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ -<참>

II .
i) $x > 0$ 일 때, $-x < 0, \frac{1}{x} > 0$ 이므로
 $f(-x) = -(-x) = x,$
 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$

ii) $x < 0$ 일 때, $-x > 0, \frac{1}{x} < 0$ 이므로
 $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}, f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}$

i), ii) 에서 $f(-x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ -<참>

III . 반례) $\frac{1}{3} > -2$ 일 때,
 $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 > 2 = f(-2)$ -<거짓>

따라서 옳은 것은 I , II 이다.

34. 공집합이 아닌 두집합 X, Y 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3, g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, 정의역 X 가 될 수 있는 집합의 개수는 a 개이다. a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로 집합 X 는 방정식 $f(x) = g(x)$ 를 만족하는 x 의 값을 원소로 갖는 집합이다.
 $x^2 - x - 3 = x + 5$ 에서 $x^2 - 2x - 8 = 0, (x - 4)(x + 2) = 0$
 $\therefore x = 4$ 또는 $x = -2$
즉, 집합 $\{-2, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X 가 될 수 있으므로 집합 X 의 개수는 $2^2 - 1 = 3(\text{개})$ 이다.
 $\therefore a = 3$

35. 집합 $A = \{1, a, b\}$ 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 3x^3 - x$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

- ① $\frac{2}{3}$ ② 2 ③ $\frac{1}{3}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$f(1) = g(1)$, $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$ 이어야 하므로
 $f(1) - g(1) = 0$, $f(a) - g(a) = 0$, $f(b) - g(b) = 0$ 이다.

따라서 $1, a, b$ 는 $f(x) - g(x) = 0$ 의 세 근이다.

즉 $3x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ 의 세 근의 합은

$$1 + a + b = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore a + b = -\frac{2}{3}$$

36. 공집합이 아닌 집합 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = -2x + 7$ 에 대하여 두 함수가 서로 같은 함수가 되게 하는 집합 X 의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$$f(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = -2x + 7$$

$$x^2 = 4$$

$$\therefore x = \pm 2$$

X 는 집합 $\{-2, 2\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이어야 한다.

따라서 구하는 집합의 개수는 $2^2 - 1 = 3$ (개)

37. 두 집합 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$, $Y = \{y \mid -5 \leq y \leq 10\}$ 에 대하여 $f: X \rightarrow Y$, $f(x) = ax + b$ ($a > 0$) 로 정의되는 함수가 일대일 대응일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

일차함수 $f(x) = ax + b$ ($a > 0$) 의 정의역이 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$ 이고

$f(-1) = -a + b$, $f(4) = 4a + b$ 이므로

치역은 $\{y \mid -a + b \leq y \leq 4a + b\}$ 이다.

그런데 함수가 일대일 대응이 되기 위해서는

공역과 치역이 같아야 하므로

$-a + b = -5$, $4a + b = 10$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 3$, $b = -2$

$\therefore 2a + b = 4$

38. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 f 는 X 에서 X 로의 일대일 대응이다. $f(1) = 4$ 일 때, $f(2) + f(3) + f(4)$ 의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여
함수 f 는 X 에서 X 로의 일대일 대응이고
 $f(1) = 4$ 이므로 $\{f(2), f(3), f(4)\} = \{1, 2, 3\}$
 $\therefore f(2) + f(3) + f(4) = 1 + 2 + 3 = 6$

39. 집합 $X = \{a, b, c\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 중 일대일대응이 아닌 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 21개

해설

X 에서 X 로의 함수의 총 개수에서
 X 에서 X 로의 일대일대응의 개수를
제외하면 된다.
 X 에서 X 로의 함수의 총 개수 : $3^3 = 27$
 X 에서 X 로의 일대일대응의 개수
: $3 \times 2 \times 1 = 6(\text{개})$
 $\therefore 27 - 6 = 21(\text{개})$

40. 집합 $X = \{-2, 0, 2\}$, $Y = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ 가 있다. X 에서 Y 로 함수 $f : X \rightarrow Y$ 중에서 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수 f 의 개수는?

① 2 가지

② 3 가지

③ 4 가지

④ 5 가지

⑤ 6 가지

해설

$f(0) = -f(0)$ 에서 $f(0) = 0$ 이고,

1) $f(-2) = -3$, $f(2) = 3$

2) $f(-2) = -1$, $f(2) = 1$

3) $f(-2) = 0$, $f(2) = 0$

4) $f(-2) = 1$, $f(2) = -1$

5) $f(-2) = 3$, $f(2) = -3$

따라서 5 가지이다.

41. 세 함수 f, g, h 를 다음과 같이 정의할 때, 다음 중 합성함수가 정의되지 않는 것은?

$$\begin{aligned} f(x) &= x-1 && (1 \leq x \leq 3) \\ g(x) &= (x-1)^2 && (0 \leq x \leq 3) \\ h(x) &= x^3 && (0 \leq x \leq 4) \end{aligned}$$

- ① $g \circ f$

② $h \circ f$

③ $h \circ g$

④ $h \circ g \circ f$

⑤ $h \circ f \circ g$

해설

일반적으로 함수 f, g 에서 (f 의 치역) $\subset$ (g 의 정의역) 이면 합성함수 $g \circ f$ 를 정의할 수 있다.
 $f(x)$ 의 치역은 $\{y \mid 0 \leq y \leq 2\}$,
 $g(x)$ 의 치역은 $\{y \mid 0 \leq y \leq 4\}$,
 $h(x)$ 의 치역은 $\{y \mid 0 \leq y \leq 64\}$ 이므로
①, ②, ③, ④의 합성함수는 모두 정의된다.
⑤ $g(x)$ 의 치역이 $\{y \mid 0 \leq y \leq 4\}$ 이고
 $f(x)$ 의 정의역이 $\{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$ 이므로 (g 의 치역) $\not\subset$ (f 의 정의역)
따라서 $f \circ g$ 가 정의되지 않으므로 $h \circ f \circ g$ 도 정의되지 않는다.

42. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & (x \text{가 짝수일 때}) \\ -x+5 & (x \text{가 홀수일 때}) \end{cases}$ 일 때, $(f \circ f)(3)$ 의 값은?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}(f \circ f)(3) &= f(f(3)) = f(-3+5) \\ &= f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1\end{aligned}$$

43. 다음을 만족하는 집합 A 의 원소가 될 수 없는 것은?

- ㉠ 모든 원소는 자연수이다.

㉡ $2 \in A, 6 \in A$

㉢ $a + b \in A, a \in A, b \in A$

- ① 4

② 5

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

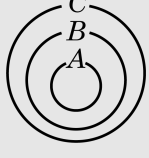
$2 \in A, 6 \in A$ 이므로
 $2 + 2 = 4 \in A, 2 + 6 = 8 \in A$
 $4 + 6 = 10 \in A, 6 + 6 = 12 \in A$

44. 세 집합 A, B, C 에 대하여 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

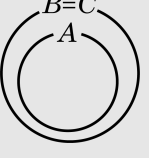
- ① $A \subset B, B \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이다.
- ② $A \subset B, B = C$ 이면 $A \subset C$ 이다.
- ③ $A \subset B, B \subset C$ 이면 $A = B$ 이다.
- ④ $A \subset B, B \subset C, C \subset A$ 이면 $A = B = C$ 이다.
- ⑤ $A \subset B \subset C$ 이면 $n(A) < n(B) < n(C)$ 이다.

해설

①



②



③ 예를 들면 $A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{1, 2, 3\}$ 이면, $A \subset B, B \subset C$ 이지만 $A \neq B$

④ $A \subset B, B \subset C, C \subset A$ 이면, $A = B = C$

⑤ $A \subset B \subset C$ 이면, $n(A) \leq n(B) \leq n(C)$

45. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 보기의 연산 과정 중 처음으로 잘못된 곳을 골라라.

보기

$$A^c - B^c = A^c \cap (B^c)^c = A^c \cap B = B - A = (A \cup B) - B$$

Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

▶ 답 :

▷ 정답 : Ⓓ

해설

$B - A = (A \cup B) - A$ 이다. 따라서 잘못된 곳은 Ⓓ $B - A = (A \cup B) - B$ 이다.

46. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 한 자리 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B = \{2, 4, 6, 8\}, A^c = \{6, 7, 8, 9\}, A^c \cap B^c = \{7, 9\}$ 일 때, $(A - B)^c$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$

해설

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A = U - A^c = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ 이므로}$$

$$A - B = \{1, 3, 5\}$$

$$\therefore (A - B)^c = \{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$$

47. 집합 $A = \{a, b, c, d\}$, $A \cap B = \{d\}$ 일 때, 다음 중 집합 B 가 될 수 있는 것은?

① $B = \{a, b, c\}$

② $B = \{b, c, d\}$

③ $B = \{c, d, e\}$

④ $B = \{c, d, f\}$

⑤ $B = \{d, e, f\}$

해설

$A \cap B = \{d\}$ 이므로 집합 A, B 에 동시에 속하는 원소는 d 뿐이다.
따라서 집합 B 는 A 의 원소 중에서 a, b, c 는 포함하지 않고 d 만을 포함하고 있는 집합이므로 보기에서 조건을 만족하는 것은 $B = \{d, e, f\}$ 이다.

48. 두 조건 $p_n, q_n (n = 1, 2)$ 에 대하여 $P_n = \{x|x \text{는 } p_n \text{을 만족한다.}\}$, $Q_n = \{x|x \text{는 } q_n \text{을 만족한다.}\}$ 이고, p_1 은 p_2 이기 위한 필요조건, q_n 은 p_n 이기 위한 충분조건일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $P_1 \cap P_2 = P_2$

② $P_1 \cap Q_1 = Q_1$
- ③ $(P_1 \cup Q_1) \cup P_2 = P_1$

④ $(P_1 \cup Q_1) \cap P_2 = P_2$
- ⑤ $(P_1 \cap Q_1) \cup Q_2 = Q_1$

해설

p_1 은 p_2 이기 위한 필요조건이므로 $P_1 \supset P_2$, q_n 은 p_n 이기 위한 충분조건이므로 $P_1 \supset Q_1, P_2 \supset Q_2$
 ① $P_1 \cap P_2 = P_2$
 ② $P_1 \cap Q_1 = Q_1$
 ③ $(P_1 \cup Q_1) \cup P_2 = P_1 \cup P_2 = P_1$
 ④ $(P_1 \cup Q_1) \cap P_2 = P_1 \cap P_2 = P_2$
 ⑤ $(P_1 \cap Q_1) \cup Q_2 = Q_1 \cup Q_2 \neq Q_1$
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

49. 좌표평면 위의 점 A(1, 2)를 지나는 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C라 할 때, $\triangle OBC$ 의 최소 넓이는?

① 3 ② 3.5 ③ 4 ④ 4.5 ⑤ 5

해설

B($a, 0$), C($0, b$)이므로
 $\triangle OBC$ 의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}ab \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 은 점 (1, 2)를 지나므로

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}} = 2\sqrt{\frac{1}{S}}$$

$$\therefore S \geq 4$$

50. 함수 $f(x) = \frac{x}{1+x}$ 에 대하여 $f(x)$ 를 20 번 합성한 함수의 $(f \circ f \circ \dots \circ f)\left(\frac{1}{10}\right)$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{200}$ ② $\frac{1}{100}$ ③ $\frac{1}{30}$ ④ $\frac{1}{20}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

해설

$$f(x) = \frac{x}{1+x} \text{ 이므로}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$= \frac{\frac{x}{1+x}}{1 + \frac{x}{1+x}}$$

$$= \frac{x}{1+2x}$$

$$(f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x))$$

$$= \frac{\frac{x}{1+2x}}{1 + \frac{x}{1+2x}}$$

$$= \frac{x}{1+3x}$$

$\vdots$

$$\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n\text{개}} f(x) = \frac{x}{1+nx}$$

$$\therefore \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{20\text{개}} f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{\frac{1}{10}}{1 + 20 \cdot \frac{1}{10}} = \frac{1}{30}$$