1. 집합 $A=\{(x,\ y)|ax-by=12\}$에 대하여 $(6,\ 2)\in A$, $(-3,\ -2)\in A$ 일 때, $a+b$의 값은?

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 26 ⑤ 30

해설

$(6,\ 2)\in A$이므로 $x=6$, $y=2$
$6a-2b=12,\ 3a-b=6\ \cdots$ ㉠
$(-3,\ -2)\in A$이므로 $x=-3,\ y=-2$
$-3a+2b=12\ \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하면 $b=18$
㉠에서 $3a-18=6\ \therefore\ a=8$
$\therefore\ a+b=26$

2. 다음 중 옳은 것은?

① $n(\varnothing) = 1$

② $A = \{2\}$ 이면 $n(A) = 2$

③ $n(\{1,\ 2,\ 3\}) - n(\{1,\ 2\}) = 3$

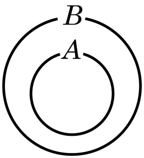
④ $A = \{4,\ 6\},\ B = \{6,\ 7,\ 8\}$ 일 때, $n(A) + n(B) = 4$

⑤ $A = \{x \mid 2 \times x = 12,\ x\text{는 짝수}\}$ 일 때, $n(A) = 1$

해설

① $n(\varnothing) = 0$
② $n(A) = 1$
③ $3 - 2 = 1$
④ $n(A) + n(B) = 2 + 3 = 5$

3. 집합 $A = \{1, 2, 4\}$ 일 때, 다음 중 벤 다이어그램을 만족하는 집합 B 가 될 수 <u>없는</u> 것은?



① $B = \{x|x$는 10보다 작은 자연수$\}$

② $B = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$

③ $B = \{x|x$는 8의 약수$\}$

④ $B = \{x|x$는 자연수$\}$

⑤ $B = \{x|x$는 짝수$\}$

해설

주어진 벤 다이어그램은 $A \subset B$ 를 나타내므로 집합 B 는 $1, 2, 4$ 를 반드시 원소로 가져야 한다.

① $B = \{1, 2, 3, \cdots, 9\}$

② $B = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$

③ $B = \{1, 2, 4, 8\}$

④ $B = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$

⑤ $1 \notin B = \{2, 4, 6, \cdots\}$

4. 세 집합 A, B, C에 대하여 $A \subset B$ 이다. 다음 중 $A \subset C$ 가 되는 경우가 <u>아닌</u> 것은?

① $A = \varnothing$, $C = \varnothing$

② $B = \{x \mid x\text{는 6의 약수}\}, C = \{x \mid x\text{는 12의 약수}\}$

③ $B = \{x \mid x\text{는 10보다 큰 짝수}\}, C = \{x \mid x\text{는 짝수}\}$

④ $A = \{x \mid x\text{는 12의 배수}\}, C = \{x \mid x\text{는 6의 배수}\}$

⑤ $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$

해설

$A \subset B$ 이므로, $B \subset C$ 일 때, $A \subset C$ 의 포함 관계가 성립한다.

① $A = \varnothing$, $C = \varnothing$이므로 $A \subset C$

② $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$이므로 $B \subset C$

③ $B = \{12,\ 14,\ 16,\ \cdots\}$, $C = \{2,\ 4,\ 6,\ \cdots\}$이므로 $B \subset C$

④ $A = \{12,\ 24,\ \cdots\}$, $C = \{6,\ 12,\ 18,\ \cdots\}$이므로 $A \subset C$

⑤ $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$이므로 $A \subset B$, $A \not\subset C$

5. 다음 중 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 인 것은?

① $A = \{1,\ 2,\ 4\}$, $B = \{1,\ 2,\ 6\}$

② $A = \varnothing$, $B = \{x \mid x$는 1 이하의 자연수$\}$

③ $A = \{3,\ 4,\ 5\}$, $B = \{x \mid x$는 3보다 크고 5보다 작은 자연수$\}$

④ $A = \{x \mid x$는 10보다 작은 홀수$\}$,
$B = \{x \mid x$는 10 이하의 홀수$\}$

⑤ $A = \{x \mid x$는 20의 약수$\}$, $B = \{x \mid x$는 20 미만의 5의 배수$\}$

해설

$A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.
따라서 보기 중 집합A 와 집합B 가 같은 것을 찾으면
④ $A = B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ 이다.

6. 세 집합 $A,\ B,\ C$에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

② $A \cup (A \cap B) = A$

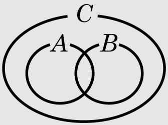
③ $(A \cup C) \cap (B \cup C) = A \cap B$

④ $A \cap (A \cup B) = A$

⑤ $A \subset C$ 이고 $B \subset C$ 이면 $(A \cup B) \subset C$

해설

① $A \cap B \subset A,\ A \cap B \subset B$ 이므로 $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ $\therefore$ 참
② $(A \cap B) \subset A$ 이므로 $A \cup (A \cap B) = A$ $\therefore$ 참
③ $(A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C = A \cap B$ $\therefore$ 거짓
④ $A \subset (A \cup B)$ 이므로 $A \cap (A \cup B) = A$ $\therefore$ 참
⑤ 벤 다이어그램으로부터 $(A \cup B) \subset C$ $\therefore$ 참



7. 집합 $A = \{x \mid x$는 9보다 작은 홀수$\}$ 의 부분집합 중 원소 3, 7 를 포함하지 않는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ＿＿＿＿＿＿ 개

▷ **정답 :** 4 개

해설

$A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$이므로 $2^{(3,\ 7\text{를 뺀 원소의 개수})} = 2^{4-2} = 2^2 = 4$

8. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$일 때, $X \subset A,\ A - X = \{1, 4\}$를 만족하는 집합 X의 진부분집합의 개수는 몇 개인가?

① 6 개 ② 7 개 ③ 8 개 ④ 9 개 ⑤ 10 개

해설

$A - X = \{1, 4\}$ 이므로 $X = \{2, 3, 5\}$

$\therefore\ 2^3 - 1 = 7$(개)

9. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 $4, 6$ 을 반드시 포함하는 부분집합의 개수가 64 개일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로 원소 $4,\ 6$ 을 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 2^{n-2} (개) 이다.

$2^{n-2} = 64,\ 2^{n-2} = 2^6$

$n - 2 = 6$ 이므로 $n = 8$

10. 두 집합 $A=\{3,5,a+4,9\}$, $B=\{1,3,6,b+1\}$ 에 대하여 $A\cap B=\{3,7\}$ 일 때,
$A\cup B$ 의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 31

해설

$A\cap B=\{3,7\}$ 이므로 $7\in A$ 이다. $a+4=7$ 이어야 한다.
그러므로 $a=3$ 이다.
$7\in B$ 이므로 $b+1=7$ 이어야 한다. 그러므로 $b=6$ 이다.
$A\cup B=\{1,3,5,6,7,9\}$ 이므로 모든 원소의 합은 $1+3+5+6+7+9=31$ 이 된다.

11. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 가 $A = \{x \mid f(x) = 0\}$, $B = \{x \mid g(x) = 0\}$, $C = \{x \mid h(x) = 0\}$ 일 때, 명제 '$f(x) \neq 0$ 이고 $(g(x) = 0$ 또는 $h(x) = 0)$'의 부정의 진리집합을 A, B, C 로 나타내면?

① $A^c \cap (B \cup C)^c$ ② $A^c \cap (B \cap C)^c$ ③ $A \cap (B \cup C)^c$

④ $A \cup (B \cup C)^c$ ⑤ $A \cup (B^c \cup C^c)$

해설

명제의 동치 관계를 이용해 보자.

$\sim [f(x) \neq 0$이고$(g(x) = 0$ 또는 $h(x) = 0)]$

$\leftrightarrow f(x) = 0$ 또는 $\sim [g(x) = 0$ 또는 $h(x) = 0]$

$\leftrightarrow f(x)$ 또는 $[g(x) \neq 0$ 이고 $h(x) \neq 0]$

$\leftrightarrow A \cup (B^c \cap C^c)$

$\leftrightarrow A \cup (B \cup C)^c$

12. 두 조건 $p : |x-2| \le h$, $q : |x+1| \le 7$에 대하여 'p이면 q이다.'가 참이 되도록 하는 h의 최댓값을 구하여라. (단, $h \ge 0$)

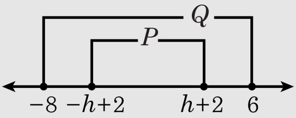
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$p \ : \ 2-h \le x \le 2+h$

$q \ : \ -8 \le x \le 6$



$-h+2 \ge -8 \leftrightarrow h \le 10$, $h+2 \le 6 \leftrightarrow h \le 4$

$\therefore h \le 4$

$\therefore n$의 최댓값은 4

13. 실수 x에 대하여 다음 명제가 참일 때, a의 최솟값을 구하여라.

$x > a$이면 $\lvert x-2\rvert > 4$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

주어진 명제가 참이므로
대우 '$\lvert x-2\rvert \le 4$ 이면 $x \le a$ 이다.' 가 참이다.
$\lvert x-2\rvert \le 4$ 에서
$-4 \le x-2 \le 4,\quad -2 \le x \le 6$이므로
$\therefore\ a \ge 6$
따라서 a 의 최솟값은 6이다.

14. 두 명제 $p \rightarrow q$와 $\sim r \rightarrow \sim q$가 모두 참일 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

① $p \rightarrow r$ ② $\sim q \rightarrow p$ ③ $p \rightarrow \sim q$

④ $r \rightarrow q$ ⑤ $r \rightarrow \sim q$

해설

$p \rightarrow q\,(T) \Rightarrow \sim q \rightarrow \sim p\,(T)$

$\sim r \rightarrow \sim q\,(T) \Rightarrow q \rightarrow r\,(T)$

$\therefore p \rightarrow q \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow r\,(T)$

15. 다음 중 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 실수이다.)

㉠ $p : a^2 + b^2 = 0$, $q : ab = 0$ ㉡ $p : (a-b)(b-c) = 0$, $q : a = b = c$ ㉢ $p : a > b$ 이고 $b > c$, $q : a > c$

① ㉡ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $p : a^2 + b^2 = 0$ 에서 $a = b = 0$ 이고, $q : ab = 0$ 에서 $a = 0$ 또는 $b = 0$ 이므로 $p \Rightarrow q, q \nRightarrow p$ 이다.
㉡ $p : (a-b)(b-c) = 0$ 에서 $a = b$ 또는 $b = c$ 이고 $q : a = b = c$ 이므로 $p \nRightarrow q, q \Rightarrow p$ 이다.
㉢ $p \Rightarrow q, q \nRightarrow p$ 이다.

16. 두 실수 a, b에 대하여 두 등식 $a+b=|a+b|$, $|a+b|=|a|+|b|$ 가 성립할 필요충분조건을 구하면?

① $a+b \geq 0$

② $a \geq 0$이고$b \geq 0$

③ $a \geq 0$ 또는 $b \geq 0$

④ $ab \geq 0$

⑤ $ab \leq 0$

해설

$a+b=|a+b|, |a+b|=|a|+|b| \Rightarrow a+b=|a|+|b|$

$\therefore a \geq 0$이고$b \geq 0$

17. $x < 2$ 는 $x \le a$ 이기 위한 필요조건, $x > b$ 는 $x > 6$ 이기 위한 충분조건이 되도록 정수 a, b 를 정할 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하면?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

필요조건, 즉 $x \le a$ 가 $x < 2$ 에 포함되어야 하므로 a 의 최댓값은 1 이고 $x > b$ 는 $x > 6$ 에 포함되어야 하므로 b 의 최솟값은 6 이다.

$\therefore\ 1 + 6 = 7$

18. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 충분조건, r 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 s 이기 위한 어떤 조건인지 써라.

▶ 답 : ______조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$
q 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow q$
q 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow s$
r 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow r$
$s \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $s \Rightarrow p$
그러나 $p \Rightarrow s$ 인지는 알 수 없다.
$\therefore$ p는 s이기 위한 필요조건이다.

19. 다음 부등식 중 성립하지 않는 것은? (단, 모든 문자는 실수)

① $|a| + |b| \geq |a + b|$

② $a \geq b > 0$일 때 $\dfrac{b}{2+a} \geq \dfrac{a}{2+b}$

③ $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc(a > 0, b > 0, c > 0)$

④ $\sqrt{3} + \sqrt{13} > \sqrt{2} + \sqrt{14}$

⑤ $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

해설

$$\frac{b}{2+a} - \frac{a}{2+b} = \frac{2b + b^2 - 2a - a^2}{(2+a)(2+b)}$$

$$= \frac{b^2 - a^2 + 2(b-a)}{(2+a)(2+b)}$$

$$= \frac{(b-a)(a+b+2)}{(a+2)(b+2)}$$ 에서

$(a+2)(b+2) > 0$이고

$(b-a) \leq 0$, $a+b+2 > 0$이므로

$(\because a \geq b > 0)$

$$\frac{b}{2+a} - \frac{a}{2+b} \leq 0$$

$$\therefore \frac{b}{2+a} \leq \frac{a}{2+b}$$

20. 부등식 $7^{20} < n^{10}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

$$\frac{7^{20}}{n^{10}} = \frac{(7^2)^{10}}{n^{10}} = \left(\frac{49}{n}\right)^{10} < 1$$

$\frac{49}{n} < 1$ 이므로 $n > 49$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 50 이다.

21. 실수 a, b에 대하여 $a^2+b^2 \geq -ab$임을 증명한 것이다. [가], [나]에 들어갈 알맞은 부등호로 짝지어진 것은?

$A=a^2+b^2,\ B=-ab$
$A-B=a^2+b^2-(-ab)$
$=a^2+b^2+ab$
$=a^2+ab+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+b^2$
$=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$([가])0
따라서 $A-B \geq 0$이므로 A([나])B이다. 즉, $a^2+b^2 \geq -ab$ (단 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

① $>, \geq$ ② $\geq, \geq$ ③ $>, >$ ④ $<, \geq$ ⑤ $\leq, \leq$

해설

$A=a^2+b^2,\ B=-ab$
$A-B=a^2+b^2-(-ab)$
$=a^2+b^2+ab$
$=a^2+ab+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+b^2$
$=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geq 0$
($a,\ b$가 실수이므로)
$\left(a+\frac{b}{2}\right)^2 \geq 0, \frac{3}{4}b^2 \geq 0$
따라서 $A-B \geq 0$이므로 $A \geq B$이다.
즉, $a^2+b^2 \geq -ab$ (단 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

22. 양수 $x,\ y$에 대하여 $\left(x+\dfrac{3}{y}\right)\left(3y+\dfrac{1}{x}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x>0,\ y>0$이므로 산술기하평균의 관계에 의해

$$(\text{준식}) = 3xy+1+9+\frac{3}{xy} \geq 2\cdot\sqrt{3xy\cdot\frac{3}{xy}}+10$$

$$= 2\cdot 3+10 = 16$$

23. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$일 때, $\dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{c}$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

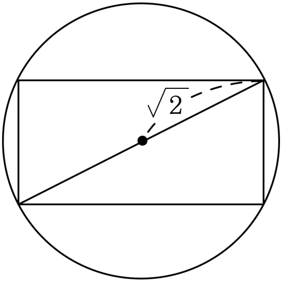
해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a} \times \frac{c}{b} \times \frac{a}{c}} = 3$$

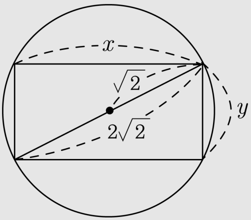
$$\therefore\ \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3$$

24. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설



그림과 같이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 $x,\ y(x>0,\ y>0)$ 라고 하면

$x^2+y^2=(2\sqrt{2})^2=8$

직사각형의 둘레의 길이는 $2x+2y$ 이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2x+2y)^2 \le (2^2+2^2)(x^2+y^2)=8\times 8=64$ (단, 등호는 $x=y$ 일 때 성립)

$\therefore -8 \le 2x+2y \le 8$

따라서 구하는 최댓값은 8 이다.

25. 다음 보기 중 $X = \{-1,\ 1,\ 2\}$에서 $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ $f : x \rightarrow |x|^2$ ㉡ $g : x \rightarrow x+2$

㉢ $h : x \rightarrow |x|+1$ ㉣ $i : x \rightarrow x^2-1$

㉤ $j : x \rightarrow |x|+3$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ $f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$

$f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$

$f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$

㉡ $g(-1) = -1+2 = 1 \in Y$

$g(1) = 1+2 = 3 \in Y$

$g(2) = 2+2 = 4 \in Y$

㉢ $h(-1) = |-1|+1 = 2 \in Y$

$h(1) = |1|+1 = 2 \in Y$

$h(2) = |2|+1 = 3 \in Y$

㉣ $i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$

㉤ $j(2) = 5 \notin Y$

그러므로 ㉣, ㉤은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

26. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g에 대하여 $f(x)$는 항등함수이고, $g(x) = -2$일 때, $f(4) + g(-1)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$는 항등함수이므로
$f(x) = x$에서 $f(4) = 4$,
$g(x) = -2$에서 $g(-1) = -2$
$\therefore\ f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

27. 집합 $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots\}$에서 함수 f를 $f(x) = (x^2$을 4로 나눈 나머지$)$로 정의하고
집합 $B = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \cdots\}$에서 함수 g를 $g(x) = (x^2$을 8로 나눈 나머지$)$로 정의하자.
두 함수 f, g의 치역을 각각 P, Q라고 할 때, 집합 $P \cup Q$는?

① $\{0,\ 1\}$ ② $\{0,\ 4\}$ ③ $\{0,\ 1,\ 4\}$
④ $\{0,\ 2,\ 4\}$ ⑤ $\{1,\ 2,\ 4\}$

해설

(i) 집합 A의 원소 x를 $x = 2k - 1$
(단, $k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)로 놓으면
$x^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4(k^2 - k) + 1$이므로 x^2을 4로 나눈 나머지는 1이다.
$\therefore\ P = \{1\}$

(ii) 집합 B의 원소 x중 $0,\ 4,\ 8,\ 12,\ \cdots$은 $x = 4k$ (단, $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)로 나타내고
$2,\ 6,\ 10,\ \cdots$은 $x = 4k - 2$
(단, $k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)로 놓자.
먼저 $x = 4k$일 때,
$x^2 = (4k)^2 = 16k^2 = 8(2k^2)$이므로
x^2을 8로 나눈 나머지는 0이다.
또, $x = 4k - 2$일 때,
$x^2 = (4k-2)^2$
$= 16k^2 - 16k + 4$
$= 8(2k^2 - 2k) + 4$이므로
x^2을 8로 나눈 나머지는 4이다.
$\therefore\ Q = \{0,\ 4\}$

(i), (ii)로부터 $P \cup Q = \{0,\ 1,\ 4\}$

28. 집합 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$에 대하여 X에서 X로의 일차함수 $f(x) = ax + b$의 정의역과 치역이 일치할 때, 두 실수 a와 b의 합 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

1) $a > 0$일 때 $f(-1) = -1,\ f(3) = 3$을 만족

$-a + b = -1,\ 3a + b = 3$

따라서 $a = 1,\ b = 0$

2) $a < 0$일 때 $f(-1) = 3,\ f(3) = -1$

$-a + b = 3,\ 3a + b = -1$

따라서 $a = -1,\ b = 2$

1), 2)에서 $a > 0$일 때 $a + b = 1 + 0 = 1$

$a < 0$일 때 $a + b = -1 + 2 = 1$

즉 $a + b = 1$

29. 함수 f 의 정의역이 $A=\{x \mid 0 \le x \le 1\}$이고,

$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \in Q) \\ 1 & (x \notin Q) \end{cases}$ 이라고 한다. 위 함수의 그래프에 대한 설명 중 맞는 것은?(Q는 유리수 전체의 집합)

① 부등식 $y \ge x(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 없다.

② 부등식 $y \ge x(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 1 개이다

③ 부등식 $y \ge x(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 무수히 많다.

④ 부등식 $y < x(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 없다.

⑤ 부등식 $y < x(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 1 개이다.

해설

함수 f 의 그래프를 그리면 y값이 0, 1인 점이 조밀하게 평면 위에 있다.

따라서 부등식 $y \ge x,\ \ y < x$ 의 영역 안에도 무수히 많다

30. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+12)$를 만족시키고 $f(1)=3$일 때, $f(13)+f(37)-f(25)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(13)=f(1+12)=f(1)$
$f(25)=f(13+12)=f(13)=f(1)$
$f(37)=f(25+12)=f(25)=f(1)$
따라서 준식은 $f(1)+f(1)-f(1)=f(1)=3$

31. 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$이고 $f(1)=1$을 만족시킬 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

임의의 실수 x, y에 대하여
$f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$가 성립하므로,
$x=1$, $y=0$을 대입하면
$f(1)f(0)=f(1)+f(1)$
$\therefore\quad f(0)=f(1)+f(1)=2$

32. 모든 양수 m, n 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 항상 $f(mn) = f(m) + f(n)$ 만족한다.

$f(2) = a, f(3) = b$ 일 때 $f(24)$ 를 a, b 를 써서 나타내면?

① $a + 2b$ ② $2a + b$ ③ $2a + 3b$

④ $3a + b$ ⑤ $3a + 2b$

해설

$f(24) = f(2^3 \cdot 3) = f(2^3) + f(3)$

$f(2^3) = f(2^2 \cdot 2) = f(2^2) + f(2)$

$\quad = \{f(2) + f(2)\} + f(2) = 3f(2)$

따라서 $3f(2) + f(3) = 3a + b$

33. 0 이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

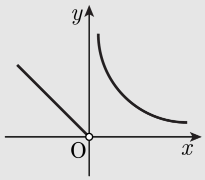
$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(x > 0) \\ -x(x < 0) \end{cases}$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

Ⅰ. $f(f(3)) + f(f(-3)) = \frac{10}{3}$ Ⅱ. $f(-x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ Ⅲ. $x_1 > x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.

① Ⅰ ② Ⅲ ③ Ⅰ, Ⅱ ④ Ⅱ, Ⅲ ⑤ Ⅰ, Ⅲ

해설

$y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



Ⅰ. $f(f(3)) + f(f(-3)) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f(3)$

$= 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ -<참>

Ⅱ.

ⅰ) $x > 0$ 일 때, $-x < 0, \frac{1}{x} > 0$ 이므로

$f(-x) = -(-x) = x,$

$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$

ⅱ) $x < 0$ 일 때, $-x > 0, \frac{1}{x} < 0$ 이므로

$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}$

ⅰ), ⅱ) 에서 $f(-x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ -<참>

Ⅲ. 반례) $\frac{1}{3} > -2$ 일 때,

$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 > 2 = f(-2)$ -<거짓>

따라서 옳은 것은 Ⅰ, Ⅱ 이다.

34. 공집합이 아닌 두집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3$, $g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$일 때, 정의역 X가 될 수 있는 집합의 개수는 a개이다. a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = g(x)$이므로 집합 X는 방정식 $f(x) = g(x)$를 만족하는 x의 값을 원소로 갖는 집합이다.

$x^2 - x - 3 = x + 5$에서 $x^2 - 2x - 8 = 0$, $(x - 4)(x + 2) = 0$

$\therefore\ x = 4$ 또는 $x = -2$

즉, 집합 $\{-2,\ 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X가 될 수 있으므로 집합 X의 개수는 $2^2 - 1 = 3$(개)이다.

$\therefore a = 3$

35. 집합 $A=\{1,a,b\}$를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=3x^3-x$, $g(x)=x^2+1$에 대하여 $f=g$일 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{2}{3}$　② 2　③ $\frac{1}{3}$　④ -1　⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$f(1)=g(1)$,　$f(a)=g(a)$,　$f(b)=g(b)$이어야 하므로
$f(1)-g(1)=0$, $f(a)-g(a)=0$, $f(b)-g(b)=0$이다.
따라서 $1,a,b$는 $f(x)-g(x)=0$의 세 근이다.
즉 $3x^3-x^2-x-1=0$의 세 근의 합은

$$1+a+b=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ a+b=-\frac{2}{3}$$

36. 공집합이 아닌 집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = -2x + 7$ 에 대하여 두 함수가 서로 같은 함수가 되게 하는 집합 X의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$f(x) = g(x)$

즉 $x^2 - 2x + 3 = -2x + 7$

$x^2 = 4$

$\therefore\ x = \pm 2$

X는 집합 $\{-2,\ 2\}$의 공집합이 아닌 부분집합이어야 한다.

따라서 구하는 집합의 개수는 $2^2 - 1 = 3$ (개)

37. 두 집합 $X = \{x \mid -1 \le x \le 4\}$, $Y = \{y \mid -5 \le y \le 10\}$ 에 대하여 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = ax+b\ (a > 0)$ 로 정의되는 함수가 일대일 대응일 때, $2a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

일차함수 $f(x) = ax+b\ (a > 0)$ 의 정의역이 $X = \{x \mid -1 \le x \le 4\}$ 이고

$f(-1) = -a+b$, $f(4) = 4a+b$ 이므로

치역은 $\{y \mid -a+b \le y \le 4a+b\}$ 이다.

그런데 함수가 일대일 대응이 되기 위해서는

공역과 치역이 같아야 하므로

$-a+b = -5$, $4a+b = 10$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 3$, $b = -2$

$\therefore 2a+b = 4$

38. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 에 대하여 함수 f 는 X 에서 X 로의 일대일 대응이다. $f(1) = 4$ 일 때,$f(2) + f(3) + f(4)$ 의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 에 대하여
함수 f 는 X 에서 X 로의 일대일 대응이고
$f(1) = 4$ 이므로 $\{f(2), f(3), f(4)\} = \{1,\ 2,\ 3\}$
$\therefore f(2) + f(3) + f(4) = 1 + 2 + 3 = 6$

39. 집합 $X = \{a, b, c\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중 일대일대응이 아닌 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 21 개

해설

X에서 X로의 함수의 총 개수에서
X에서 X로의 일대일대응의 개수를
제외하면 된다.
X에서 X로의 함수의 총 개수 : $3^3 = 27$
X에서 X로의 일대일대응의 개수
: $3 \times 2 \times 1 = 6$(개)
$\therefore\ 27 - 6 = 21$(개)

40. 집합 $X = \{-2,\ 0,\ 2\}$, $Y = \{-3,\ -1,\ 0,\ 1,\ 3\}$가 있다. X에서 Y로의 함수 $f\ :\ X \to Y$ 중에서 $f(-x) = -f(x)$를 만족하는 함수 f의 개수는?

① 2 가지 ② 3 가지 ③ 4 가지

④ 5 가지 ⑤ 6 가지

해설

$f(0) = -f(0)$에서 $f(0) = 0$ 이고,

1) $f(-2) = -3,\quad f(2) = 3$

2) $f(-2) = -1,\quad f(2) = 1$

3) $f(-2) = 0,\quad f(2) = 0$

4) $f(-2) = 1,\quad f(2) = -1$

5) $f(-2) = 3,\quad f(2) = -3$

따라서 5 가지이다.

41. 세 함수 f, g, h 를 다음과 같이 정의할 때, 다음 중 합성함수가 정의되지 <u>않는</u> 것은?

$$f(x) = x - 1 \qquad (1 \le x \le 3)$$
$$g(x) = (x-1)^2 \qquad (0 \le x \le 3)$$
$$h(x) = x^3 \qquad (0 \le x \le 4)$$

① $g \circ f$ ② $h \circ f$ ③ $h \circ g$

④ $h \circ g \circ f$ ⑤ $h \circ f \circ g$

해설

일반적으로 함수 f, g 에서 (f 의 치역)$\subset$ (g 의 정의역) 이면 합성함수 $g \circ f$ 를 정의할 수 있다.

$f(x)$ 의 치역은 $\{y \mid 0 \le y \le 2\}$,

$g(x)$ 의 치역은 $\{y \mid 0 \le y \le 4\}$,

$h(x)$ 의 치역은 $\{y \mid 0 \le y \le 64\}$ 이므로

①, ②, ③, ④의 합성함수는 모두 정의된다.

⑤ $g(x)$ 의 치역이 $\{y \mid 0 \le y \le 4\}$이고

$f(x)$ 의 정의역이 $\{x \mid 1 \le x \le 3\}$ 이므로 (g 의 치역) $\not\subset$ (f 의 정의역)

따라서 $f \circ g$ 가 정의되지 않으므로 $h \circ f \circ g$ 도 정의되지 않는다.

42. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & (x\text{가 짝수일 때}) \\ -x+5 & (x\text{가 홀수일 때}) \end{cases}$ 일 때, $(f \circ f)(3)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}(f \circ f)(3) &= f(f(3)) = f(-3+5) \\ &= f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1\end{aligned}$$

43. 다음을 만족하는 집합 A 의 원소가 될 수 없는 것은?

㉠ 모든 원소는 자연수이다.

㉡ $2 \in A,\ 6 \in A$

㉢ $a+b \in A,\ a \in A,\ b \in A$

① 4 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$2 \in A,\ 6 \in A$ 이므로

$2+2=4 \in A,\ 2+6=8 \in A$

$4+6=10 \in A,\ 6+6=12 \in A$

44. 세 집합 A, B, C 에 대하여 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $A \subset B$, $B \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이다.

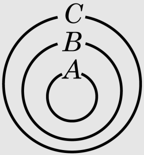
② $A \subset B$, $B = C$ 이면 $A \subset C$ 이다.

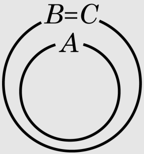
③ $A \subset B$, $B \subset C$ 이면 $A = B$ 이다.

④ $A \subset B$, $B \subset C$, $C \subset A$ 이면 $A = B = C$ 이다.

⑤ $A \subset B \subset C$ 이면 $n(A) < n(B) < n(C)$ 이다.

해설

①


②


③ 예를 들면 $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 2, 3\}$ 이면, $A \subset B$, $B \subset C$ 이지만 $A \neq B$

④ $A \subset B$, $B \subset C$, $C \subset A$ 이면, $A = B = C$

⑤ $A \subset B \subset C$ 이면, $n(A) \leq n(B) \leq n(C)$

45. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 보기의 연산 과정 중 처음으로 잘못된 곳을 골라라.

보기

$$\underset{㉠}{A^C - B^C = A^C \cap (B^C)^C} \underset{㉡}{= A^C \cap B} \underset{㉢}{= B - A} \underset{㉣}{= (A \cup B) - B}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

$B-A = (A \cup B) - A$ 이다. 따라서 잘못된 곳은 ㉣ $B-A = (A \cup B) - B$ 이다.

46. 전체집합 $U=\{x|x$는 한 자리 자연수$\}$ 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $A^c=\{6,\ 7,\ 8,\ 9\}$, $A^c\cap B^c=\{7,\ 9\}$ 일 때, $(A-B)^c$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{2,4,6,7,8,9\}$

해설

$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$A=U-A^c=\{1,2,3,4,5\}$이므로

$A-B=\{1,3,5\}$

$\therefore (A-B)^c=\{2,4,6,7,8,9\}$

47. 집합 $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$, $A\cap B=\{d\}$일 때, 다음 중 집합 B가 될 수 있는 것은?

① $B=\{a,\ b,\ c\}$　② $B=\{b,\ c,\ d\}$　③ $B=\{c,\ d,\ e\}$

④ $B=\{c,\ d,\ f\}$　⑤ $B=\{d,\ e,\ f\}$

해설

$A\cap B=\{d\}$ 이므로 집합 $A,\ B$에 동시에 속하는 원소는 d뿐이다. 따라서 집합 B는 A의 원소 중에서 $a,\ b,\ c$는 포함하지 않고 d만을 포함하고 있는 집합이므로 보기에서 조건을 만족하는 것은 $B=\{d,\ e,\ f\}$이다.

48. 두 조건 p_n, $q_n(n=1,\ 2)$에 대하여 $P_n=\{x|x$는 p_n을 만족한다.$\}$, $Q_n=\{x|x$는 q_n을 만족한다.$\}$ 이고, p_1 은 p_2이기 위한 필요조건, q_n 은 p_n이기 위한 충분조건일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $P_1\cap P_2=P_2$

② $P_1\cap Q_1=Q_1$

③ $(P_1\cup Q_1)\cup P_2=P_1$

④ $(P_1\cup Q_1)\cap P_2=P_2$

⑤ $(P_1\cap Q_1)\cup Q_2=Q_1$

해설

p_1 은 P_2이기 위한 필요조건이므로 $P_1\supset P_2$, q_n 은 p_n이기 위한 충분조건이므로 $P_1\supset Q_1,\ P_2\supset Q_2$

① $P_1\cap P_2=P_2$

② $P_1\cap Q_1=Q_1$

③ $(P_1\cup Q_1)\cup P_2=P_1\cup P_2=P_1$

④ $(P_1\cup Q_1)\cap P_2=P_1\cap P_2=P_2$

⑤ $(P_1\cap Q_1)\cup Q_2=Q_1\cup Q_2\neq Q_1$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

49. 좌표평면 위의 점 $A(1,\ 2)$를 지나는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (a>0,\ b>0)$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 B, C라 할 때, △OBC의 최소 넓이는?

① 3 ② 3.5 ③ 4 ④ 4.5 ⑤ 5

해설

$B(a,\ 0)$, $C(0,\ b)$이므로

△OBC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}ab\cdots\cdots$ ㉠

직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$은 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}}=2\sqrt{\frac{1}{S}}$

$\therefore\ S\geq 4$

50. 함수$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 에 대하여 $f(x)$ 를 20 번 합성한 함수의 $(f\circ f\circ\cdots\circ f)\left(\dfrac{1}{10}\right)$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{200}$ ② $\dfrac{1}{100}$ ③ $\dfrac{1}{30}$ ④ $\dfrac{1}{20}$ ⑤ $\dfrac{1}{10}$

해설

$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 이므로

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\dfrac{\dfrac{x}{1+x}}{1+\dfrac{x}{1+x}}=\dfrac{x}{1+2x}$$

$$(f\circ f\circ f)(x)=f((f\circ f)(x))=\dfrac{\dfrac{x}{1+2x}}{1+\dfrac{x}{1+2x}}=\dfrac{x}{1+3x}$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{n\text{개}}f(x)=\dfrac{x}{1+nx}$$

$$\therefore\ \underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{20\text{개}}f\left(\dfrac{1}{10}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{10}}{1+20\cdot\dfrac{1}{10}}=\dfrac{1}{30}$$