

1. 실수의 집합을 R 이라 할 때, 함수 $f : R \rightarrow R$ 가 다음과 같이 정해져 있다. 이 때, 일대일 대응인 것은?

① $f(x) = ax + b \ (a \neq 0)$ ② $f(x) = x^2$

③ $f(x) = |x|$ ④ $f(x) = 2$

⑤ $f(x) = \frac{1}{x}$

해설

지역이 실수이고 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 인 것은 증가만 하거나 감소만 하는 그래프이다.

①은 직선으로서 $a > 0$ 이면 증가하고 $a < 0$ 이면 감소하는 그래프이다.

2. 자연수의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(1) = 1$ 이고 $f(x+1) = f(x) + 4\sqrt{f(x)} + 4$ 가 성립할 때, $f(6)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 121

해설

$$\begin{aligned} f(x+1) &= f(x) + 4\sqrt{f(x)} + 4 = (\sqrt{f(x)} + 2)^2 \\ f(1) &= 1, f(2) = 3^2, f(3) = 5^2, \\ f(4) &= 7^2, f(5) = 9^2, f(6) = 11^2 = 121 \end{aligned}$$

3. 함수 $f : A \rightarrow B$ 에서 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ 이고,
 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 일 때, $\{f(1)\}^2 + \{f(2)\}^2 +$
 $\{f(3)\}^2 + \{f(4)\}^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 이므로

$B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ 에서 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 을 사용하여 $1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 을 만들 수 있는 경우는 더하는 순서에 상관없이 $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3}$ 으로 표현된다.

이 때, 정의역 중에서 1, $\sqrt{2}$ 에 대응하는 것은 1개이고 $\sqrt{3}$ 에

대응하는 것은 2개이어야 한다.

따라서 $\{f(1)\}^2 + \{f(2)\}^2 + \{f(3)\}^2 + \{f(4)\}^2$

$= 1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 9$

4. 정의역이 $\{-1, 0, 1\}$ 일 때, 다음 보기 중 서로 같은 함수를 찾으면?

보기

㉠ $f(x) = \sqrt{x^2}$

㉡ $g(x) = |x|$

㉢ $h(x) = x^2$

㉣ $k(x) = x^4 + x^3 + x^2$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠. $f(-1) = \sqrt{(-1)^2} = 1,$

$f(0) = \sqrt{0^2} = 0,$

$f(1) = \sqrt{1^2} = 1$

㉡. $g(x) = |x| = \sqrt{x^2} = f(x)$

㉢. $h(-1) = (-1)^2 = 1,$

$h(0) = 0^2 = 0,$

$h(1) = 1^2 = 1$

㉣. $k(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 = 1,$

$k(0) = 0^4 + 0^3 + 0^2 = 0,$

$k(1) = 1^4 + 1^3 + 1^2 = 3$

5. 다음 보기는 실수 전체의 집합 R 에서 R 로 의 함수이다. 일대일 대응인 것을 모두 고르면?

<보기>

㉠ $f(x) = x + 1$

㉡ $f(x) = 1$

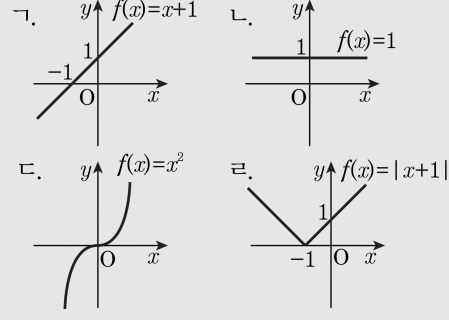
㉢ $f(x) = x^3$

㉣ $f(x) = |x + 1|$

- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉢, ㉣

해설

일대일 대응이 되려면 함수의 그래프가 증가함수 또는 감소함수이어야 한다.



따라서 일대일 대응인 것은 ㉠, ㉢ 이다.

6. 집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수가 24 개일 때, 집합 X 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 12 ② 16 ③ 24 ④ 32 ⑤ 36

해설

집합 X, Y 의 원소의 개수가
 $n(X) = n(Y) = n$ 일 때,
집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는
 $n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ (개)이다.
문제에서 일대일 대응의 개수가 24 이므로
 $\therefore n = 4$
 $\therefore$ 집합 X 의 부분집합의 개수는
 $2^n = 2^4 = 16$ (개)

7. 함수 $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) 가 x 의 모든 값에 대하여 $f \circ f = f$ 가 성립하도록 상수 a, b 의 값을 정하면?

- ① $a = 1, b = 0$ ② $a = 1, b = 1$ ③ $a = 2, b = 0$
④ $a = 2, b = 1$ ⑤ $a = 3, b = 0$

해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax + b)$
 $= a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$ 이므로
 x 의 모든 값에 대하여 $f \circ f = f$ 가 성립하려면
 $a^2x + ab + b = ax + b$ 가 x 에 대한
항등식이 되어야 한다.
따라서 $a^2 = a \cdots$ ①,
 $ab + b = b \cdots$ ②가 되어야 한다.
①에서 $a = 0$ 또는 $a = 1$
②에서 $ab = 0$ 이므로 $a = 0$ 또는 $b = 0$
그런데 $a \neq 0$ 이므로 $a = 1$ 이고 $b = 0$

8. 실수 전체의 집합 R 에 대하여 함수 $f : R \rightarrow R$ 를 $f(x) = \begin{cases} \pi & (x\text{는 유리수}) \\ 0 & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$ 으로 정의할 때, 합성함수 $f \circ f$ 의 치역은?
- ① $\{0\}$ ② $\{\pi\}$
- ③ $\{0, \pi\}$ ④ 유리수 전체의 집합
- ⑤ 실수 전체의 집합

해설

i) x 가 유리수이면 $f(x) = \pi$ 이고
 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\pi) = 0$
 ii) x 가 무리수이면 $f(x) = 0$ 이고
 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(0) = \pi$
 따라서, 합성함수 $f \circ f$ 의 치역은 $\{0, \pi\}$ 이다.

9. 두 함수 $f(x) = x + a$, $g(x) = x^2 - 1$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립하도록 실수 a 의 값을 정하면?

① 0 ② -1 ③ -2 ④ 1 ⑤ 4

해설

$g \circ f = f \circ g$ 에서
 $(x + a)^2 - 1 = x^2 - 1 + a$,
 $x^2 + 2ax + a^2 - 1 = x^2 - 1 + a$
즉 $2ax + a^2 - a = 0$
모든 실수 x 에 대해 성립하려면 $a = 0$

10. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -4x - 5$ 일 때, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족시키는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ g)(-2)$ 의 값은 얼마인가?

- ① 5 ② 3 ③ 1 ④ -3 ⑤ -5

해설

$h(x) = ax + b$ 로 놓으면
 $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x + 3)$
 $= a(2x + 3) + b = 2ax + 3a + b$
그런데, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 이므로
 $2ax + 3a + b = -4x - 5$,
 $2a = -4, 3a + b = -5$
즉, $a = -2, b = 1$ 이므로 $h(x) = -2x + 1$
 $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3) = -5$

해설

$(h \circ f)(x) = g(x)$ 에서
 $h(f(x)) = g(x)$ 이고 $f(x) = 2x + 3$ 이므로
 $h(2x + 3) = g(x)$
또한, $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3)$
 $h(3) = g(0) = -5$

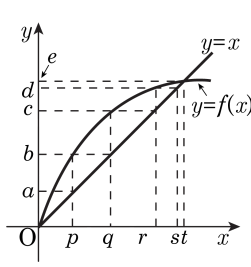
11. 림은 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. 이를 이용하여 $(f \circ f)(x) = d$ 를 만족시키는 x 의 값은 얼마인가?

- ① p

② q

③ r
- ④ s

⑤ t



해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = d \cdots \cdots \textcircled{1}$
 그런데, 주어진 그래프에서 $f(r) = d$ 이므로
 $\textcircled{1}$ 에서 $f(x) = r$
 $\therefore r = c$ 에서 $f(x) = r = c$
 $\therefore x = q$

12. $X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이고, $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수 a 의 값을 하면?

① 3

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이므로

일대일 대응이 되려면

$x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.

부등식을 풀면

$x \leq 0$ 또는 $x \geq 7$

$x \geq a$ 이므로 $x \geq 7$ 을 만족하는 x 의 최솟값이 a 가 된다.

$\therefore a = 7$

13. 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 에서 치역의 원소의 개수가 2개인 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 36 개

해설

원소가 2 개인 치역은

 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\},$

{3, 4}로 6 개이다.

정의역의 원소가 3 개, 공역의 원소가 2 개인 함수의 개수는

 $2^3 = 8$ 인데

이 중에서 지역의 원소가 1 개인 함수가 각각 2 개이므로 $8-2=6$

따라서 $6 \times 6 = 36$ 개

14. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 에 대하여 $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6x - 1$

이다. $f\left(\frac{4-x}{3}\right) = ax + b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

- ① -36 ② -20 ③ -4 ④ 20 ⑤ 36

해설

$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6x - 1$ 에서 $\frac{x+1}{2} = t$ 라고 하면 $x = 2t - 1$ 이므로

$f(t) = 6(2t - 1) - 1 = 12t - 7 \quad \dots\dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$

① 에 t 대신에 $\frac{4-x}{3}$ 를 대입하면

$f\left(\frac{4-x}{3}\right) = 12\left(\frac{4-x}{3}\right) - 7 = 16 - 4x - 7 = -4x + 9$

$\therefore ab = (-4) \cdot 9 = -36$

15. 함수 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ 에 대하여 $f^9\left(\frac{1}{2}\right) + f^{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하면?
 (단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$ 이다.)

- ☒ ① $\frac{80}{399}$
 ☐ ② $\frac{82}{399}$
 ☐ ③ $\frac{83}{399}$
 ☐ ④ $\frac{85}{399}$
 ☐ ⑤ $\frac{86}{399}$

해설

$$f^2(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{2x+1}$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{3x+1}$$

$$f^4(x) = f(f^3(x)) = f\left(\frac{x}{3x+1}\right) = \frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{x}{3x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{4x+1}$$

이제 $f^{n-1}(x) = \frac{x}{(n-1)x+1}$ 라고 놓으면

$$f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) = f\left(\frac{x}{(n-1)x+1}\right)$$

$$= \frac{\frac{x}{(n-1)x+1}}{\frac{x}{(n-1)x+1} + 1} = \frac{x}{(n-1)x+1+x}$$

$$= \frac{x}{nx+1}$$

$$\therefore f^9(2) + f^{10}(2) = \frac{2}{9 \cdot 2 + 1} + \frac{2}{10 \cdot 2 + 1} = \frac{80}{399}$$