**1.** 실수의 집합을 $R$이라 할 때, 함수 $f : R \to R$가 다음과 같이 정해져 있다. 이 때, 일대일 대응인 것은?

① $f(x) = ax + b \ (a \neq 0)$ ② $f(x) = x^2$

③ $f(x) = |x|$ ④ $f(x) = 2$

⑤ $f(x) = \dfrac{1}{x}$

**해설**

치역이 실수이고 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$인 것은 증가만 하거나 감소만 하는 그래프이다.
①은 직선으로서 $a > 0$이면 증가하고 $a < 0$이면 감소하는 그래프이다.

**2.** 자연수의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 $f(1) = 1$이고 $f(x+1) = f(x) + 4\sqrt{f(x)} + 4$가 성립할 때, $f(6)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 121

해설

$f(x+1) = f(x) + 4\sqrt{f(x)} + 4 = (\sqrt{f(x)} + 2)^2$
$f(1) = 1,\ f(2) = 3^2,\ f(3) = 5^2,$
$f(4) = 7^2,\ f(5) = 9^2,\ f(6) = 11^2 = 121$

**3.** 함수 $f : A \to B$ 에서 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$ 이고, $f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 일 때, $\{f(1)\}^2+\{f(2)\}^2+\{f(3)\}^2+\{f(4)\}^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 이므로

$B = \left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$ 에서 $1$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 을 사용하여 $1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 을 만들 수 있는 경우는 더하는 순서에 상관없이 $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{3}$ 으로 표현된다.

이 때, 정의역 중에서 $1$, $\sqrt{2}$ 에 대응하는 것은 1개이고 $\sqrt{3}$ 에 대응하는 것은 2개이어야 한다.

따라서 $\{f(1)\}^2+\{f(2)\}^2+\{f(3)\}^2+\{f(4)\}^2$

$= 1^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2 = 9$

**4.** 정의역이 $\{-1,\ 0,\ 1\}$ 일 때, 다음 보기 중 서로 같은 함수를 찾으면?

보기

㉠ $f(x) = \sqrt{x^2}$ ㉡ $g(x) = |x|$

㉢ $h(x) = x^2$ ㉣ $k(x) = x^4 + x^3 + x^2$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠. $f(-1) = \sqrt{(-1)^2} = 1,$

$f(0) = \sqrt{0^2} = 0,$

$f(1) = \sqrt{1^2} = 1$

㉡. $g(x) = |x| = \sqrt{x^2} = f(x)$

㉢. $h(-1) = (-1)^2 = 1,$

$h(0) = 0^2 = 0,$

$h(1) = 1^2 = 1$

㉣. $k(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 = 1,$

$k(0) = 0^4 + 0^3 + 0^2 = 0,$

$k(1) = 1^4 + 1^3 + 1^2 = 3$

**5.** 다음 보기는 실수 전체의 집합 $R$ 에서 $R$ 로의 함수이다. 일대일 대응인 것을 모두 고르면?

<보기>

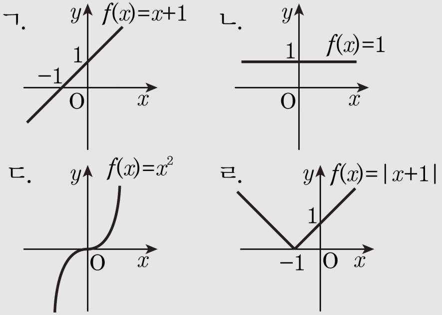
㉠ $f(x) = x + 1$　　　㉡ $f(x) = 1$

㉢ $f(x) = x^3$　　　㉣ $f(x) = |x + 1|$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉣　④ ㉡, ㉢　⑤ ㉢, ㉣

해설

일대일 대응이 되려면 함수의 그래프가 증가함수 또는 감소함수이어야 한다.




따라서 일대일 대응인 것은 ㉠, ㉢ 이다.

**6.** 집합 $X$ 에서 $Y$ 로의 일대일 대응의 개수가 24 개일 때, 집합 $X$ 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 12 ② 16 ③ 24 ④ 32 ⑤ 36

해설

집합 $X$, $Y$ 의 원소의 개수가
$n(X) = n(Y) = n$ 일 때,
집합 $X$ 에서 $Y$ 로의 일대일 대응의 개수는
$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$(개)이다.
문제에서 일대일 대응의 개수가 24 이므로
$\therefore\ n = 4$
$\therefore$ 집합 $X$ 의 부분집합의 개수는
$2^n = 2^4 = 16$(개)

**7.** 함수 $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ 가 $x$의 모든 값에 대하여 $f \circ f = f$가 성립하도록 상수 $a$, $b$의 값을 정하면?

① $a = 1$ , $b = 0$ ② $a = 1$ , $b = 1$ ③ $a = 2$ , $b = 0$

④ $a = 2$ , $b = 1$ ⑤ $a = 3$ , $b = 0$

해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax + b)$
$= a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$ 이므로
$x$ 의 모든 값에 대하여 $f \circ f = f$ 가 성립하려면
$a^2x + ab + b = ax + b$ 가 $x$ 에 대한
항등식이 되어야 한다.
따라서 $a^2 = a \cdots$①,
$ab + b = b \cdots$②가 되어야 한다.
①에서 $a = 0$ 또는 $a = 1$
②에서 $ab = 0$ 이므로 $a = 0$ 또는 $b = 0$
그런데 $a \neq 0$ 이므로 $a = 1$ 이고 $b = 0$

**8.** 실수 전체의 집합 $R$에 대하여 함수 $f : R \to R$를 $f(x) = \begin{cases} \pi & (x\text{는 유리수}) \\ 0 & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$ 으로 정의할 때, 합성함수 $f \circ f$의 치역은?

① $\{0\}$ ② $\{\pi\}$

③ $\{0,\ \pi\}$ ④ 유리수 전체의 집합

⑤ 실수 전체의 집합

**해설**

i) $x$ 가 유리수이면 $f(x) = \pi$ 이고

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\pi) = 0$

ii) $x$ 가 무리수이면 $f(x) = 0$ 이고

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(0) = \pi$

따라서, 합성함수 $f \circ f$ 의 치역은 $\{0,\ \pi\}$ 이다.

**9.** 두 함수 $f(x) = x + a$, $g(x) = x^2 - 1$일 때, 모든 실수 $x$에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$가 성립하도록 실수 $a$의 값을 정하면?

① 0 ② $-1$ ③ $-2$ ④ 1 ⑤ 4

해설

$g \circ f = f \circ g$에서
$(x + a)^2 - 1 = x^2 - 1 + a$,
$x^2 + 2ax + a^2 - 1 = x^2 - 1 + a$
즉 $2ax + a^2 - a = 0$
모든 실수 $x$에 대해 성립하려면 $a = 0$

**10.** 두 함수 $f(x)=2x+3$ , $g(x)=-4x-5$ 일 때, $(h\circ f)(x)=g(x)$ 를 만족시키는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h\circ g)(-2)$ 의 값은 얼마인가?

① 5 ② 3 ③ 1 ④ $-3$ ⑤ $-5$

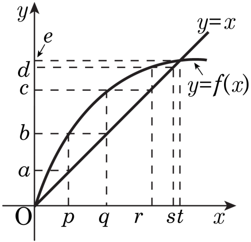
해설

$h(x)=ax+b$ 로 놓으면
$(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(2x+3)$
$=a(2x+3)+b=2ax+3a+b$
그런데, $(h\circ f)(x)=g(x)$ 이므로
$2ax+3a+b=-4x-5,$
$2a=-4,\ 3a+b=-5$
즉, $a=-2, b=1$ 이므로 $h(x)=-2x+1$
$(h\circ g)(-2)=h(g(-2))=h(3)=-5$

해설

$(h\circ f)(x)=g(x)$ 에서
$h(f(x))=g(x)$ 이고 $f(x)=2x+3$ 이므로
$h(2x+3)=g(x)$
또한, $(h\circ g)(-2)=h(g(-2))=h(3)$
$h(3)=g(0)=-5$

**11.** 림은 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 그래프이다. 이를 이용하여 $(f\circ f)(x)=d$ 를 만족시키는 $x$ 의 값은 얼마인가?




① $p$ ② $q$ ③ $r$

④ $s$ ⑤ $t$

**해설**

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=d\cdots\cdots$ ㉠

그런데, 주어진 그래프에서 $f(r)=d$ 이므로

㉠에서 $f(x)=r$

$\therefore r=c$ 에서 $f(x)=r=c$

$\therefore x=q$

**12.** $X = \{x \mid x \geq a$ 인 실수 $\}$이고, $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수 $a$ 의 값을 하면?

① 3　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a$ 인 실수 $\}$이므로
일대일 대응이 되려면
$x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.
부등식을 풀면
$x \leq 0$ 또는 $x \geq 7$
$x \geq a$ 이므로 $x \geq 7$ 을 만족하는 $x$ 의 최솟값이 $a$ 가 된다.
$\therefore\ a = 7$

**13.** 집합 $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{1,2,3,4\}$ 에 대하여 함수 $f:X\to Y$ 에서 치역의 원소의 개수가 2 개인 함수 $f$ 의 개수를 구하시오.

▶ **답 :** ________ 개

▷ **정답 :** 36 개

해설

원소가 2 개인 치역은
$\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{1,\ 4\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{2,\ 4\}$,
$\{3,\ 4\}$로 6 개이다.
정의역의 원소가 3 개, 공역의 원소가 2 개인함수의 개수는
$2^3=8$ 인데
이 중에서 치역의 원소가 1 개인 함수가 각각 2 개이므로 $8-2=6$
따라서 $6\times6=36$ 개

**14.** 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f$ 에 대하여 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=6x-1$ 이다. $f\left(\frac{4-x}{3}\right)=ax+b$ 일 때, 두 상수 $a$, $b$ 의 곱 $ab$ 의 값은?

① $-36$ ② $-20$ ③ $-4$ ④ $20$ ⑤ $36$

**해설**

$f\left(\frac{x+1}{2}\right)=6x-1$ 에서 $\frac{x+1}{2}=t$ 라고 하면 $x=2t-1$ 이므로

$f(t)=6(2t-1)-1=12t-7$ ······㉠

㉠에 $t$ 대신에 $\frac{4-x}{3}$ 를 대입하면

$$f\left(\frac{4-x}{3}\right)=12\left(\frac{4-x}{3}\right)-7=16-4x-7=-4x+9$$

$\therefore\ ab=(-4)\cdot 9=-36$

**15.** 함수 $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ 에 대하여 $f^9\left(\dfrac{1}{2}\right) + f^{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하면? (단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$ 이다.)

① $\dfrac{80}{399}$ ② $\dfrac{82}{399}$ ③ $\dfrac{83}{399}$ ④ $\dfrac{85}{399}$ ⑤ $\dfrac{86}{399}$

해설

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(\frac{x}{x+1}) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}$$

$$= \frac{x}{2x+1}$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f(\frac{x}{2x+1}) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1}$$

$$= \frac{x}{3x+1}$$

$$f^4(x) = f(f^3(x)) = f(\frac{x}{3x+1}) = \frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{x}{3x+1}+1}$$

$$= \frac{x}{4x+1}$$

이제 $f^{n-1}(x) = \dfrac{x}{(n-1)x+1}$ 라고 놓으면

$$f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) = f\left(\frac{x}{(n-1)x+1}\right)$$

$$= \frac{\frac{x}{(n-1)x+1}}{\frac{x}{(n-1)x+1}+1} = \frac{x}{(n-1)x+1+x}$$

$$= \frac{x}{nx+1}$$

$$\therefore\ f^9(2) + f^{10}(2) = \frac{2}{9\cdot 2+1} + \frac{2}{10\cdot 2+1} = \frac{80}{399}$$