

1. 다음 규칙에 따라 전광판은 불이 들어온다고 한다. 불이 켜진 전광판이 나타내는 숫자를 구하여라.

[규칙]

불이 들어오는 자리는 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 중 원소 1, 4를 반드시 포함하고, 원소 6을 포함하지 않는 부분집합이다.

{1, 4}	{3, 4}	{1, 2, 4}
{1, 3, 4}	{1, 4, 6}	{1, 2, 4, 5}
{1, 4, 5}	{1, 2, 3, 4}	{1, 3, 4, 5}
{2, 3, 4, 6}	{1, 2, 4, 6}	{1, 2, 3, 4, 5}

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

집합 A 의 부분집합 중 원소 1, 4를 반드시 포함하고 6을 포함하지 않는 부분집합을 구하면 {1, 4}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {1, 4, 5}, {1, 2, 3, 4}, {1, 2, 4, 5}, {1, 3, 4, 5}, {1, 2, 3, 4, 5}이다. 다음 그림과 같이 전광판에 나타나는 숫자는 4이다.

2. 세 집합 $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{3, 4, 8, 9\}$, $C = \{1, 2, 3, 5\}$ 에 대하여 $(A \cap B) - C$ 는?

① $\{4\}$

② $\{2, 4\}$

③ $\{4, 8\}$

④ $\{2, 8\}$

⑤ $\{2, 4, 8\}$

해설

$(A \cap B) - C = \{4, 8\} - \{1, 2, 3, 5\} = \{4, 8\}$ 이다.

3. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$$A = 3x^2 - xy + 2y^2$$
$$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$$

- ① $A < B$

② $A \leq B$

③ $A > B$

④ $A \geq B$

⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$ 이므로 $A \geq B$

4. 집합 $A = \{x \mid 6 \times x = 7 \text{인 자연수}\}$ 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 1 개

▷ 정답 : 1 개

해설

$A = \emptyset$

모든 집합의 부분집합에는 $\emptyset$ 과 자기 자신이 포함되는데 $\emptyset$ 은 $\emptyset$ 과 자기 자신이 같으므로 집합 A 의 부분집합의 개수는 1 개

5. 집합 $A = \{a, b, c, d\}$ 의 부분집합 중에서 a 를 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 8 개

▷ 정답 : 8 개

해설

$\{b, c, d\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

즉, $2^3 = 8$

6. 집합 $A = \{1, 2, 4\}$ 의 부분집합 중 원소 2 또는 4 를 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 6 개

▷ 정답 : 6 개

해설

원소 2 를 포함하는 부분집합의 개수 :
 $2^{3-1} = 4$ (개)
원소 4 를 포함하는 부분집합의 개수 :
 $2^{3-1} = 4$ (개)
원소 2, 4 를 포함하는 부분집합의 개수 :
 $2^{3-2} = 2$ (개)
원소 2 또는 4 를 포함하는 부분집합의 개수 :
 $4 + 4 - 2 = 6$ (개)

7. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 2 \text{보다 크고 } 15 \text{보다 작은 } 3 \text{의 배수}\}$ 일 때, 원소 3 또는 6을 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 12개

해설

$$A = \{3, 6, 9, 12\}$$

원소 3 을 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{4-1} = 8 \text{ (개)}$$

원소 6 을 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{4-1} = 8 \text{ (개)}$$

원소 3, 6 을 포함하는 부분집합의 개수 :

 $2^{4-2} = 4$ (개)

원소 3 또는 6 을 포함하는 부분집합의 개수 :

$$8 + 8 - 4 = 12 \text{ (개)}$$

8. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 14 \text{ 이하의 } 2 \text{의 배수}\}$ 중 원소 2 또는 4를 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 96개

해설

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

원소 2 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{7-1} = 64 \text{ (개)}$$

원소 4 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{7-1} = 64 \text{ (개)}$$

원소 2, 4 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{7-2} = 32 \text{ (개)}$$

원소 2 또는 4 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$64 + 64 - 32 = 96 \text{ (개)}$$

9. $U = \{a, b, c, d, e\}$ 일 때, $\{d, e\} \cap A \neq \emptyset$ 을 만족시키는 U 의 부분집합 A 의 개수를 구하면?

① 8개 ② 16개 ③ 24개 ④ 32개 ⑤ 64개

해설

$\{d, e\} \cap A \neq \emptyset$ 이므로 집합 A 의 원소에는 $\{d\}$ 또는 $\{e\}$ 가 반드시 속한다.

$\{d\}$ 를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{5-1} = 16(\text{개})$, $\{e\}$ 를

반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{5-1} = 16(\text{개})$,

$\{d, e\}$ 를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{5-2} = 8(\text{개})$

$\therefore 16 + 16 - 8 = 24(\text{개})$

10. 집합 $A = \{a, b, c, d, e\}$ 일 때, $X \subset A$, $A - X = \{a, c, e\}$ 를 만족하는 X 의 부분집합의 개수는 몇 개인가?

① 4개 ② 6개 ③ 8개 ④ 12개 ⑤ 16개

해설

$A - X = \{a, c, e\}$ 이므로 X 는 a, c, e 를 원소로 가져서는 안된다.
따라서 X 는 $\{b, d\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.
 $\therefore 2^2 = 4(\text{개})$

11. 자연수 전체의 집합의 두 부분집합 M, N 에 대하여 $M = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 작은 소수}\}$, $N = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 작은 홀수}\}$ 라고 할 때, $(M \cup N) \cap X = X$, $(M \cap N) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

$M = \{2, 3, 5, 7\}$, $N = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 이므로 $M \cup N = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$,
 $M \cap N = \{3, 5, 7\}$

따라서 X 는 $M \cup N$ 의 부분집합 중 3, 5, 7을 반드시 포함하는 집합이다.

그러므로 $2^{6-3} = 2^3 = 8(\text{개})$

12. 집합 $A = \{1, 3, 5, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, n 을 모두 포함하는 부분집합의 개수가 32 개일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

집합 A 의 원소의 개수를 a 개라 하면 원소 1, n 을 모두 포함하는 부분집합의 개수는 2^{a-2} 개이다.

$$2^{a-2} = 32 = 2^5$$

$$a - 2 = 5 \text{ 이므로 } a = 7$$

따라서 집합 A 의 원소의 개수가 7 개이므로 n 의 값은 13 이다.

13. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 5\}$ 에 대하여

$(A \cup B)^c \subset X, (A - B)^c \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

- ① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

$$(A \cup B)^c = \{4\}, (A - B)^c = \{2, 4, 5\}$$

$(A \cup B)^c \subset X \subset (A - B)^c$, 즉 $\{4\} \subset X \subset \{2, 4, 5\}$ 이다.

따라서 집합 X 의 개수는 $2 \times 2 = 4$ (개) 이다.

14. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{ 이하의 자연수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 홀수}\}$ 에 대하여 다음 조건을 모두 만족하는 집합 X 의 개수는?

I. $A \cap X = X$ II. $(A - B) \cup X = X$

- ① 2개 ② 4개 ③ 8개 ④ 16개 ⑤ 32개

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 이고 $(A - B) \subset X \subset A$ 이다.
따라서 $\{2, 4, 6\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이므로
집합 X 의 개수는 $2 \times 2 \times 2 = 8(\text{개})$ 이다.

15. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 홀수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 5, 7\}$, $B = \{3, 7\}$ 에 대하여 $B \cup X = X$, $(A - B) \cap X = \{5\}$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?(단, X 는 U 의 부분집합이다.)

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$\{3, 7\} \cup X = X$, $\{1, 5\} \cap X = \{5\}$ 이므로
 $\{3, 7\} \subset X$, $1 \notin X$, $5 \in X$ 이다.
따라서 $\{3, 5, 7\} \subset X \subset \{3, 5, 7, 9\}$ 이다.
따라서 집합 X 의 개수는 $2 = 2(\text{개})$ 이다.

16. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x \mid x \text{는 짝수}\}$,
 $B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $(A \cup B)^c \subset X$, $(A - B)^c \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{5, 10\}$ 이고 $(A \cup B)^c = \{1, 3, 7, 9\}$, $(A - B)^c = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ 이다.
따라서 $(A \cup B)^c \subset X \subset (A - B)^c$ 이므로 집합 X 의 개수는 $2 \times 2 = 4$ (개) 이다.

17. 다음 중 조건 p 가 조건 q 의 필요조건인 것은 ? (단, x, y, z 는 모두 실수)

① $p : x > 0, y > 0, \quad q : x + y > 0, xy > 0$

② $p : x < 1, \quad q : 0 < x < 1$

③ $p : x < 0, \quad q : x + |x| = 0$

④ $p : x > y, \quad q : xz > yz$

⑤ $p : x \geq 1$ 이고 $y \geq 1, \quad q : x + y \geq 2$

해설

① $p \rightarrow q, q \rightarrow p$

② $p \nrightarrow q, q \rightarrow p$ (반례 : $x = -1$)

③ $p \rightarrow q, q \nrightarrow p$ (반례 : $x = 0$)

④ $z > 0$ 일 때, $z > 0$ 일 때, $p \rightarrow q, q \rightarrow p$ $z \leq 0$ 일 때, $p \nrightarrow q, q \nrightarrow p$

⑤ $p \rightarrow q, q \nrightarrow p$

18. 네 집합 A, B, C, D 가 $A \subset B, C \subset D$ 를 만족시킬 때, 다음 (1), (2)의 안에 들어갈 내용을 <보기>에서 찾아 차례로 나열한 것을 고르면?

- $\textcircled{1} \ B \subset C$ 인 것은 $A \subset D$ 이기 위한
- $\textcircled{2} \ B \cap D \neq \emptyset$ 인 것은 $A \cap C \neq \emptyset$ 이기 위한

보기

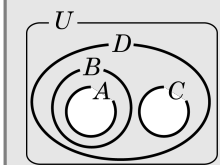
- I. 필요조건이나, 충분조건은 아니다.
- II. 충분조건이나, 필요조건은 아니다.
- III. 필요충분조건이다.
- IV. 아무 조건도 아니다.

- $\textcircled{1}$ I, II
- $\textcircled{2}$ I, III
- $\textcircled{3}$ II, I
- $\textcircled{4}$ II, IV
- $\textcircled{5}$ III, II

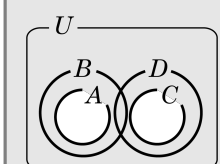
해설

$\textcircled{1} \ B \subset C$ 이면 $A \subset B \subset C \subset D$
($\because A \subset B, C \subset D$) $\therefore A \subset D$
그러나 $A \subset D$ 이면 $B \subset C$ 는 성립하지 않는다. 따라서, 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

[반례]



$\textcircled{2} \ B \cap D \neq \emptyset \not\Rightarrow A \cap C \neq \emptyset$ [반례]



19. 다음에서 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요조건이고 충분조건은 아닌 것을 골라 기호로 써라. (단, a, b 는 실수)

- $\supsetneq$ $p : A \cup B = B, q : A \subset B$
- $\subseteq$ $p : a^2 + b^2 = 0, q : a = 0$ 이고 $b = 0$
- $\subsetneq$ $p : a^2 = b^2, q : a = b$

▶ 답 :

▷ 정답 : $\subsetneq$

해설

$\subsetneq$ $p : a^2 = b^2 \leftarrow q : a = b$
 $\therefore p$ 는 q 이기 위한 필요조건

20. x, y 가 실수일 때. $|x| + |y| = |x + y|$ 가 되기 위한 필요충분조건을 구하면?

① $xy = 0$

② $xy > 0$

③ $xy \geq 0$

④ $xy < 0$

⑤ $xy \leq 0$

해설

양변을 제곱하면 $x^2 + y^2 + 2|xy| = x^2 + y^2 + 2xy$

$\therefore |xy| = xy$ 가 성립하려면 $xy \geq 0$ 일 때이다.

21. 다음 두 조건 $p : 2 \leq x \leq 5$, $q : x \geq a$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건이 되도록 상수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 각각의 진리집합을 P, Q 라 할 때, $P \subset Q$ 이 성립해야 한다. 따라서 $2 \leq x \leq 5$ 를 만족하는 영역은 $x \geq a$ 를 만족하는 영역에 포함되어야 함으로 $a \leq 2$ 따라서 a 의 최댓값은 2

22. 두 조건 $p(x) : |x - a| \leq 1$, $q(x) : -1 < x < 2, 3 \leq x \leq 5$ 에 대하여 $p(x)$ 가 $q(x)$ 이기 위한 충분조건일 때, 정수 a 의 개수는?

- ① 5개 ② 4개 ③ 3개 ④ 2개 ⑤ 1개

해설

두 조건 $p(x)$, $q(x)$ 의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P = \{x | a - 1 \leq x \leq a + 1\}$, $Q = \{x | -1 < x < 2, 3 \leq x \leq 5\}$ $p(x)$ 가 $q(x)$ 이기 위한 충분조건이면 $P \subset Q$ 이어야 하므로

(i) $-1 < a - 1$ 이고 $a + 1 < 2$,

즉 $0 < a < 1 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

(ii) $3 \leq a - 1$ 이고 $a + 1 \leq 5$, 즉 $a = 4 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$

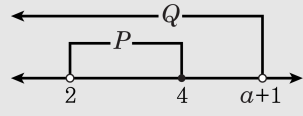
$\textcircled{\text{㉠}}$, $\textcircled{\text{㉡}}$ 에서 정수 a 는 4뿐이므로 1개이다.

23. 두 조건 $p : 2 < x \leq 4, q : x < a + 1$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건 일 때, 실수 a 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a > 3$

해설



$p \rightarrow q$ 이므로 $a + 1 > 4 \Rightarrow a > 3$

24. 실수 x 에 대하여 $|x-1| < a$ 가 $-2 < x < 6$ 이기 위한 충분조건일 때, a 의 최댓값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$|x-1| < a \rightarrow -a+1 < x < a+1, -a+1 < x < a+1$ 이 $-2 < x < 6$ 범위 안에 포함되어야 한다.
 $-2 \leq -a+1 \rightarrow a \leq 3, a+1 \leq 6 \rightarrow a \leq 5 \therefore a \leq 3$

25. 두 조건 p , q 를 만족하는 집합을 각각 $P = \{x \mid x \leq a\}$, $Q = \{x \mid x \leq -1, 2 \leq x \leq 4\}$ 라 하면 p 는 q 이기 위한 필요조건이다. 상수 a 의 최솟값은 얼마인가?

① -2 ② -1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 5

해설

필요조건을 만족시키기 위해서는 P 의 집합이 Q 의 집합을 포함해야 하므로 최솟값은 4 가 된다.

26. 세 조건 a, b, c 를 만족하는 값들의 집합을 각각 A, B, C 라고 할 때, $A = \{2p\}, B = \{p^2 + 1, 4\}, C = \{4, 2p + 1\}$ 이다. a 가 b 이기위한 충분조건이고, b 는 c 이기위한 필요충분조건일 때, p 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$a \Rightarrow b$ 이므로
 $2p = p^2 + 1$ 또는 $2p = 4$
 $b \Leftarrow c$ 이므로 $2p + 1 = p^2 + 1$
 $\therefore p^2 - 2p = 0$
따라서 $p = 0$ 또는 $p = 2$
 $p = 0$ 이면 $2 \times 0 \neq 0 + 1$ 이고 $2 \times 0 \neq 4$ 이므로
 $p = 2$

27. 두 조건 p, q 에 대하여 $\sim q$ 는 p 이기 위한 필요조건이다. 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 다음 중 옳은 것은? (단, U 는 전체집합이다.)

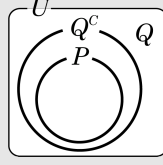
- ① $P \cap Q = \emptyset$ ② $P \cup Q = U$ ③ $P \subset Q$
④ $Q \subset P$ ⑤ $Q^c = P$

해설

$$P \subset Q^c \Rightarrow P - Q^c = \emptyset \Rightarrow P \cap (Q^c)^c = \emptyset$$

$$\therefore P \cap Q = \emptyset$$

벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



28. 다음 중 옳은 것을 고르면?

- ① $a > 0, b > 0$ 이면 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$
- ② 모든 실수 a, b 에 대하여 $|a| + |b| > a + b$
- ③ 모든 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 > ab$
- ④ 모든 실수 a, b 대하여 $|a - b| \leq |a| - |b|$
- ⑤ $a > b > 0$ 일 때, $\sqrt{a-b} < \sqrt{a} - \sqrt{b}$

해설

- ① : $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$, 양변을 제곱하면
 $a + b + 2\sqrt{ab} > a + b$
 $\Rightarrow 2\sqrt{ab} > 0$ (참)
- ② ④ ⑤ : 모두 양변을 제곱하여 정리해 본다.
- ③ : (반례) $a = 0, b = 0$

30. $a > 0, b > 0$ 일 때, $(2a + b) \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$$(2a + b) \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right) = 16 + 1 + \frac{8b}{a} + \frac{2a}{b}$$

$$a > 0, b > 0 \text{ 이므로 } \frac{8b}{a} + \frac{2a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{8b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} = 8$$

$$\therefore \text{최솟값은 } 17 + 8 = 25$$

31. 한 자리의 자연수 l, m, n 에 대하여 $\{l, m, n\} = \{p, q, r\}$ 가 성립한다고 한다. 이 때, $\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r}$ 의 최소값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} \geq 3 \times 3 \sqrt{\frac{l}{p} \times \frac{m}{q} \times \frac{n}{r}}$$

그런데 $\{l, m, n\} = \{p, q, r\}$ 이므로 $lmn = pqr$ 이다.

따라서, $\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} \geq 3$

(단, 등호는 $l = p, m = q, n = r$ 일 때 성립)

$\therefore$ 구하는 최소값은 3

32. 네 실수 a, b, c, d 에 대하여 $a+b+c+d=8, a^2+b^2+c^2+d^2=124$ 가 성립할 때, 실수 d 의 최솟값 m 과 최댓값 M 의 합 $m+M$ 의 값은?

- ① -7 ② -3 ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$a+b+c+d=8, a^2+b^2+c^2+d^2=124$
 $a+b+c=8-d, a^2+b^2+c^2=124-d^2$
코시-슈바르츠 부등식에서
 $(1+1+1)(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$ 이므로
 $3(124-d^2) \geq (8-d)^2$
 $372-3d^2 \geq d^2-16d+64$
 $4d^2-16d+64-372 \leq 0$
 $4d^2-16d-308 = d^2-4d-77 \leq 0$
 $\therefore (d-11)(d+7) \leq 0$
 $\therefore -7 \leq d \leq 11$
따라서 최솟값 $m=-7$, 최댓값 $M=11$
이므로 $m+M=-7+11=4$

33. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$ 일 때, 다음 조건을 모두 만족하는 집합 P 의 갯수를 구하여라.

$P \subset A$
 $1 \in P$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8 개

해설

집합 A 를 원소나열법으로 나타내면
 $A = \{1, 2, 4, 8\}$ 이고, 조건에서
 $P \subset A$ 이고 1을 원소로 가지는 집합 P 를 구하면 $\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 8\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 8\}, \{1, 4, 8\}, \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로, 개수는 모두 8개이다.

34. 두 집합 $A = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이상 } 15 \text{ 이하의 자연수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 12 \text{ 이상 } 18 \text{ 미만의 } 3 \text{의 배수}\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

조건

$$X \subset A, \quad B \subset X, \quad n(X) = 4$$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 6 개

해설

$A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
 $B = \{12, 15\}$
 $X \subset A, B \subset X$ 이므로 $B \subset X \subset A$
 $\{12, 15\} \subset X \subset \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 12, 15는 반드시 포함하고 원소의 개수가 4개인 집합이므로
 $\{10, 11, 12, 15\}, \{10, 12, 13, 15\},$
 $\{10, 12, 14, 15\}, \{11, 12, 13, 15\},$
 $\{11, 12, 14, 15\}, \{12, 13, 14, 15\}$ 의 6개이다.

35. 세 개의 원소로 된 집합 $A = \{1, 3, 4\}$ 에서 조건 $X \subset Y \subset A$ 를 만족하는 집합 X, Y 를 만들 수 있는 경우의 수는? (단, 집합 X 의 원소의 개수는 1 개 이상이다.)

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

해설

- (i) $X = \{1\}$ 일 때 집합 Y 는 원소 1 을 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 개수는 $2^2 = 4$ (개)
 $X = \{3\}$, $X = \{4\}$ 일 때도 마찬가지로 $3 \times 4 = 12$ (개)
(ii) $X = \{1, 3\}$ 일 때 집합 Y 는 원소 1, 3 을 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 개수는 $2^1 = 2$ (개)
 $X = \{1, 4\}$, $X = \{3, 4\}$ 일 때도 마찬가지로 $2 \times 3 = 6$ (개)
(iii) $X = \{1, 3, 4\}$ 일 때 $Y = \{1, 3, 4\}$ 뿐이므로 1 개
 $\therefore$ 19 개

36. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 부분집합의 개수가 32 개일 때, 자연수 n 의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 2^{n-3} 개이다.

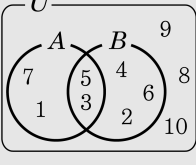
$$2^{n-3} = 32, \quad 2^{n-3} = 2^5$$

$$n - 3 = 5 \text{ 이므로 } n = 8$$

37. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여
 $A = \{1, 3, 5, 7\}, A \cap B = \{3, 5\}, B \cap A^c = \{2, 4, 6\}, A^c \cap B^c = \{8, 9, 10\}$ 일 때, B^c 은?
- ① $\{1, 7\}$ ② $\{1, 8\}$ ③ $\{1, 7, 9, 10\}$
④ $\{1, 7, 8, 10\}$ ⑤ $\{1, 7, 8, 9, 10\}$

해설

$B \cap A^c = \{2, 4, 6\} = B - A$ 이므로
 $B^c = U - B = \{1, 7, 8, 9, 10\}$ 이다.



38. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 20\text{이하의 소수}\}$ 에 대하여 $A = \{2, 7, 11\}$, $B = \{3, 7, 11, 17\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $A \cap B = \{7, 11\}$
- ② $A \cap B^c = \{2\}$
- ③ $A^c \cap B = \{3, 17\}$
- ④ $A^c \cup B^c = \{2, 3, 9, 13, 17, 19\}$
- ⑤ $A^c \cap B^c = \{5, 13, 19\}$

해설

$U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$,
 $A = \{2, 7, 11\}$, $B = \{3, 7, 11, 17\}$
② $A \cap B^c = A - B = \{2\}$
③ $A^c \cap B = B - A = \{3, 17\}$
④ $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{2, 3, 5, 13, 17, 19\}$
⑤ $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{5, 13, 19\}$

39. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 한 자리 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B = \{2, 4, 6, 8\}, A^c = \{6, 7, 8, 9\}, A^c \cap B^c = \{7, 9\}$ 일 때, $(A - B)^c$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 $A = U - A^c = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로
 $A - B = \{1, 3, 5\}$
 $\therefore (A - B)^c = \{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$

40. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 8 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의
세 부분집합 $A = \{x|x \text{는 } 8 \text{ 이하의 홀수}\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$, $C = \{1, 5\}$
가 있다.
전체집합 U 의 두 부분집합 X, Y 에 대하여 $X \circ Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$
이라 할 때, $(A \circ B) \circ C$ 는?

- ① {1, 3}
- ② {1, 5}
- ③ {1, 7}
- ④ {1, 2, 5}
- ⑤ {1, 2, 6, 7}

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 3, 5, 7\}$ 이다.
 $X \circ Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c) = (X \cup Y) - (X \cap Y)$ 이므로
 $A \circ B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\} - \{1, 3\} = \{2, 5, 6, 7\}$ 이다.
따라서 $(A \circ B) \circ C = \{1, 2, 5, 6, 7\} - \{5\} = \{1, 2, 6, 7\}$ 이다.

41. 다음 중에서 p 는 q 이기 위한 필요조건이고 충분조건은 아닌 것을 고르면? (단, 모든 문자는 실수)
- ① $p : a > 3, q : a^2 > 9$
 - ② $p : a^2 = ab, q : a = b$
 - ③ $p : |a| < |b|, q : a < b$
 - ④ $p : |x - 1| = 2, q : x^2 = -2$
 - ⑤ $p : x = 1$ 이고 $y = 1, q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$

해설

- ① 충분조건
- ③ 아무런 조건관계가 아니다.
- ④ 아무런 조건관계가 아니다. 진리집합을 구해보면 $P = \{-1, 3\}, Q = \emptyset$ 에서 $P \supset Q$ 관계로 보아 필요조건이라고 하지 않도록 주의하자.
- ⑤ 필요충분조건

42. 다음 중 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = B \cap A^c$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은? (단, A^c 는 전체집합 U 에 대한 A 의 여집합)

- ① $A = B$
- ② $B \subset A$
- ③ $A \subset B$
- ④ $A \cap B = \emptyset$
- ⑤ $A \cup B = \emptyset$

해설

$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A - B) \cup (B - A)$
따라서 $(A - B) \cup (B - A) = B \cap A^c$ 에서 $(A - B) \cup (B - A) = B - A$
가 성립하려면 $(A - B) \subset (B - A)$ 이어야 하는데 $A - B$ 와 $B - A$
는 서로소이므로 $A - B = \emptyset \therefore A \subset B$

43. 세 조건 p, q, r 에 대하여 $\sim p \Rightarrow q, r \Rightarrow \sim q$ 일 때, 조건 p 가 r 이기 위한 필요충분조건이라면 다음 중 어떤 조건이 더 필요한가?

① $p \Rightarrow q$

② $q \Rightarrow r$

③ $p \Rightarrow r$

④ $\sim q \Rightarrow p$

⑤ $\sim r \Rightarrow p$

해설

$$r \Rightarrow \sim q \text{ 이므로 } q \Rightarrow \sim r$$

$$\sim p \Rightarrow q \text{ 이고 } q \Rightarrow \sim r \text{ 이므로 삼단논법에 의하여 } \sim p \Rightarrow \sim r$$

$$\therefore r \Rightarrow p$$

따라서, $p \Leftrightarrow r$ 가 되려면 $r \Rightarrow p$ 이외에 $p \Rightarrow r$ 가 더 필요하다.

44. x, y 가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 아닌 것을 모두 고른 것은?

$\textcircled{\tiny \neg} \quad x + 1 > 0$	$\textcircled{\tiny \sqcup} \quad x^2 + xy + y^2 \geq 0$
$\textcircled{\tiny \sqsubset} \quad x + y \geq x - y $	$\textcircled{\tiny \ominus} \quad x + y \geq x - y $

- ① $\textcircled{\tiny \neg}$

② $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqsubset}$

③ $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \ominus}$
- ④ $\textcircled{\tiny \sqcup}, \textcircled{\tiny \ominus}$

⑤ $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqcup}, \textcircled{\tiny \sqsubset}$

해설

$\textcircled{\tiny \neg} \quad x > -1$ 일 때만 성립한다.
 $\textcircled{\tiny \sqcup} \quad x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$
(단, 등호는 $x = y = 0$ 일 때 성립)
 $\textcircled{\tiny \sqsubset} \quad (|x| + |y|)^2 - |x - y|^2$
 $\quad = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x - y)^2$
 $\quad = 2(|xy| + xy) \geq 0$
 $\quad \therefore (|x| + |y|)^2 \geq |x - y|^2$
(단, 등호는 $xy \leq 0$ 일 때 성립)
 $\textcircled{\tiny \ominus} \quad$ (반례) $x = 2, y = -3$ 일 때
 $|2 + (-3)| = 1, |2 - (-3)| = 5$ 이므로
 $|x + y| < |x - y|$
따라서 절대부등식이 아닌 것은 $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \ominus}$ 이다.

45. 다음은 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1$ 을 만족하는 두 양수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 최솟값을 구하는 풀이이다. 적절하지 못한 부분은?

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{4}{y} &\geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{4}{y}} \cdots \textcircled{㉠} \\ &= \frac{4}{\sqrt{xy}} \\ \therefore \sqrt{xy} &\geq 4 \cdots \textcircled{㉡} \\ \therefore x+y &\geq 2\sqrt{xy} \geq 2 \cdot 4 = 8 \cdots \textcircled{㉢} \\ \text{따라서 } x+y \text{의 최솟값은 } 8 \text{이다. } &\cdots \cdots \textcircled{㉣} \end{aligned}$$

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉣
- ⑤ 틀린 곳이 없다.

해설

㉠에서 등호가 성립하는 경우는 $\frac{1}{x} = \frac{4}{y}$
즉 $y = 4x$ 일 때이고,
㉡에서 등호가 성립하는 경우는
 $x = y$ 일 때이므로 서로 일치하지 않는다.
따라서 $x+y$ 의 최솟값은 8이 될 수 없다.

46. $a > 1$ 일 때, $\frac{1}{a-1} + 4a - 3$ 의 최솟값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\frac{1}{a-1} > 0$$

$$4(a-1) + 1 + \frac{1}{a-1} \geq 2 \cdot \sqrt{4(a-1) \cdot \frac{1}{(a-1)}} + 1$$

$$= 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

47. $x+y+z=4, x^2+y^2+z^2=6$ 을 만족하는 실수 x, y, z 에 대하여 x 가 취할 수 있는 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$ 의 값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$x+y+z=4$ 에서 $y+z=4-x\cdots\textcircled{1}$
 $x^2+y^2+z^2=6$ 에서 $y^2+z^2=6-x^2\cdots\textcircled{2}$
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(1^2+1^2)(y^2+z^2)\geq(y+z)^2$
(단, 등호는 $y=z$ 일 때 성립)
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 대입하면
 $2(6-x^2)\geq(4-x)^2, 3x^2-8x+4\leq 0$
 $(3x-2)(x-2)\leq 0 \quad \therefore \frac{2}{3}\leq x\leq 2$
따라서 $M=2, m=\frac{2}{3}$ 이므로 $\frac{M}{m}=3$

48. 두 집합 A, B 가 $A = \{x \mid x^2 - a^2 \leq 0\}$, $B = \{x \mid |x + 2| \leq b\}$ 일 때, $A \cap B = \emptyset$ 이기 위한 필요충분조건은? (단, $a > 0, b > 0$)

① $ab = 2$

② $ab = 4$

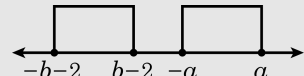
③ $a + b > 2$

④ $a + b < 4$

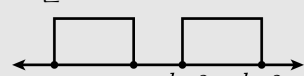
⑤ $a + b < 2$

해설

$A = \{x \mid x^2 - a^2 \leq 0\} = \{x \mid -a \leq x \leq a\}$ $B = \{x \mid |x + 2| \leq b\} = \{x \mid -b - 2 \leq x \leq b - 2\}$ $A \cap B = \emptyset$ 이기 위해서는 그림과 같아야 한다.



또는



그런데 $a > 0, b > 0$ 에서 $-b - 2 < 0$ 이므로 아래 수직선의 경우는 모순이다. 위의 수직선에서 $b - 2 < -a$ 이므로 만족하는 조건은 $a + b < 2$ ($\because a > 0, b > 0$)

49. x, y 가 실수일 때, $x^2+2xy+3y^2-4x+4y+14$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 0
- ② 1
- ③ $\frac{1}{2}$
- ④ 2
- ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$$\begin{aligned} &x^2+2(y-2)x+3y^2+4y+14 \\ &= (x+y-2)^2-(y-2)^2+3y^2+4y+14 \\ &= (x+y-2)^2+2y^2+8y+10 \\ &= (x+y-2)^2+2(y+2)^2+2 \geq 2 \end{aligned}$$

따라서 $x=6, y=-4$ 일 때, 최솟값은 2

해설

위의 방법은 완전제곱꼴로 묶을 수 있는 특수한 경우에 사용할 수 있는 좀 더 쉬운 풀이이고 일반적인 경우의 해법은 좀 더 복잡하다.

$x^2+2xy+3y^2-4x+4y+14 \geq k$ 라고 하면

$x^2+2xy+3y^2-4x+4y+14-k \geq 0$

이 모든 실수 x, y 에 대해 성립하므로

x 에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 판별식을 사용하면

$x^2+2(y-2)x+3y^2+4y+14-k \geq 0$

$D/4 = -2y^2-8y-10+k \leq 0$

$2y^2+8y+10-k \geq 0$ 이고 모든 y 에 대해 성립하는 절대부등식

이므로

$D/4 = 16-20+2k \leq 0$

$\therefore k \leq 2$

따라서 준식의 최솟값은 k 의 최댓값인 2이다.

50. 양수 a, b 에 대하여 다음 식 $a^2 + b + \frac{16}{2a + b}$ 의 최솟값과 그 때의 a, b 의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최솟값= 7

▷ 정답 : $a = 1$

▷ 정답 : $b = 2$

해설

$$\begin{aligned} & a^2 + b + \frac{16}{2a + b} \\ &= -1 + (a^2 - 2a + 1) + 2a + b + \frac{16}{2a + b} \\ &= -1 + (a - 1)^2 + (2a + b + \frac{16}{2a + b}) \quad \dots \quad \textcircled{1} \\ & 2a + b + \frac{16}{2a + b} \geq 2\sqrt{(2a + b)(\frac{16}{2a + b})} = 8 \text{에서} \\ & \text{등호는 } 2a + b = \frac{16}{2a + b} \text{ 일 때 성립하고} \\ & \text{이때, } 2a + b = 4 \text{ (} a, b \text{는 양수)} \quad \dots \quad \textcircled{2} \\ & \textcircled{1} \text{에서 최소는 } a = 1 \text{ 일 때이다.} \\ & \therefore \textcircled{2} \text{에서 } a = 1, b = 2 \text{ 일 때 최솟값 : 7} \end{aligned}$$