1. 다음 규칙에 따라 전광판은 불이 들어온다고 한다. 불이 켜진 전광판이 나타내는 숫자를 구하여라.

> [규칙]
> 불이 들어오는 자리는 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 부분집합 중 원소 1, 4를 반드시 포함하고, 원소 6을 포함하지 않는 부분집합이다.

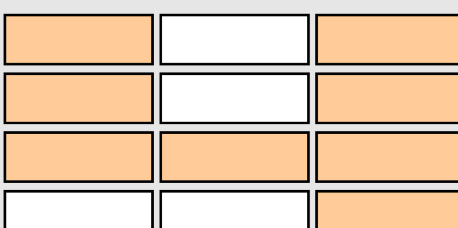
$\{1,4\}$	$\{3,4\}$	$\{1,2,4\}$
$\{1,3,4\}$	$\{1,4,6\}$	$\{1,2,4,5\}$
$\{1,4,5\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{1,3,4,5\}$
$\{2,3,4,6\}$	$\{1,2,4,6\}$	$\{1,2,3,4,5\}$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

집합 A 의 부분집합 중 원소 1, 4를 반드시 포함하고 6을 포함하지 않는 부분집합을 구하면 $\{1,\ 4\}$, $\{1,\ 2,\ 4\}$, $\{1,\ 3,\ 4\}$, $\{1,\ 4,\ 5\}$, $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$, $\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이다. 다음 그림과 같이 전광판에 나타나는 숫자는 4이다.



2. 세 집합 $A = \{1, 2, 4, 8\}, B = \{3, 4, 8, 9\}, C = \{1, 2, 3, 5\}$ 에 대하여 $(A \cap B) - C$ 는?

① $\{4\}$ ② $\{2, 4\}$ ③ $\{4, 8\}$

④ $\{2, 8\}$ ⑤ $\{2, 4, 8\}$

해설

$(A \cap B) - C = \{4, 8\} - \{1, 2, 3, 5\} = \{4, 8\}$ 이다.

3. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$$A = 3x^2 - xy + 2y^2$$
$$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$$

① $A < B$ ② $A \leq B$ ③ $A > B$

④ $A \geq B$ ⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$이므로 $A \geq B$

4. 집합 $A = \{x \mid 6 \times x = 7$인 자연수$\}$의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 1 개

해설

$A = \varnothing$
모든 집합의 부분집합에는 $\varnothing$ 과 자기 자신이 포함되는데 $\varnothing$ 은 $\varnothing$ 과 자기 자신이 같으므로 집합 A 의 부분집합의 개수는 1 개

5. 집합 $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$ 의 부분집합 중에서 a 를 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 8 개

해설

$\{b,\ c,\ d\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

즉, $2^3=8$

6. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 4\}$ 의 부분집합 중 원소 2 또는 4 를 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ________ 개

▷ **정답 :** 6 개

해설

원소 2 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{3-1}=4$ (개)
원소 4 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{3-1}=4$ (개)
원소 2, 4 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{3-2}=2$ (개)
원소 2 또는 4 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$4+4-2=6$ (개)

7. 집합 $A = \{x \mid x$는 2보다 크고 15보다 작은 3의 배수$\}$일 때, 원소 3 또는 6 을 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12 개

해설

$A = \{3,\ 6,\ 9,\ 12\}$
원소 3 을 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{4-1} = 8$ (개)
원소 6 을 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{4-1} = 8$ (개)
원소 3, 6 을 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{4-2} = 4$ (개)
원소 3 또는 6 을 포함하는 부분집합의 개수 :
$8 + 8 - 4 = 12$ (개)

8. 집합 $A = \{x \mid x$는 14 이하의 2의 배수$\}$ 중 원소 2 또는 4 를 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ________ 개

▷ **정답 :** 96 개

해설

$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14\}$
원소 2 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{7-1} = 64$ (개)
원소 4 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{7-1} = 64$ (개)
원소 2, 4 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{7-2} = 32$ (개)
원소 2 또는 4 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$64 + 64 - 32 = 96$ (개)

9. $U=\{a,b,c,d,e\}$ 일 때, $\{d,e\}\cap A\neq\phi$ 을 만족시키는 U의 부분집합 A의 개수를 구하면?

① 8개 ② 16개 ③ 24개 ④ 32개 ⑤ 64개

해설

$\{d,\ e\}\cap A\neq\phi$ 이므로 집합 A의 원소에는 $\{d\}$ 또는 $\{e\}$가 반드시 속한다.
$\{d\}$를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{5-1}=16$(개), $\{e\}$를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{5-1}=16$(개) ,
$\{d,e\}$를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{5-2}=8$(개)
$\therefore 16+16-8=24$(개)

10. 집합 $A=\{a,b,c,d,e\}$ 일 때, $X \subset A$, $A-X=\{a,c,e\}$ 를 만족하는 X 의 부분집합의 개수는 몇 개인가?

① 4 개 ② 6 개 ③ 8 개 ④ 12 개 ⑤ 16 개

해설

$A-X=\{a,\ c,\ e\}$ 이므로 X 는 $a,\ c,\ e$ 를 원소로 가져서는 안된다.
따라서 X 는 $\{b,\ d\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.
$\therefore\ 2^2=4$(개)

11. 자연수 전체의 집합의 두 부분집합 M, N 에 대하여 $M = \{x \mid x$는 10보다 작은 소수$\}$, $N = \{x \mid x$는 10보다 작은 홀수$\}$라고 할 때, $(M \cup N) \cap X = X$, $(M \cap N) \cup X = X$를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 5개　② 6개　③ 7개　④ 8개　⑤ 9개

해설

$M = \{2, 3, 5, 7\}$, $N = \{1, 3, 5, 7, 9\}$이므로 $M \cup N = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$,
$M \cap N = \{3, 5, 7\}$
따라서 X 는 $M \cup N$의 부분집합 중 3, 5, 7을 반드시 포함하는 집합이다.
그러므로 $2^{6-3} = 2^3 = 8$(개)

12. 집합 $A = \{1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, n 을 모두 포함하는 부분집합의 개수가 32 개일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

집합 A 의 원소의 개수를 a 개라 하면 원소 1, n을 모두 포함하는 부분집합의 개수는 2^{a-2} 개이다.

$2^{a-2} = 32 = 2^5$

$a - 2 = 5$ 이므로 $a = 7$

따라서 집합 A 의 원소의 개수가 7 개이므로 n 의 값은 13 이다.

13. 전체집합 $U=\{1,2,3,4,5\}$ 의 두 부분집합 $A=\{1,3,5\}, B=\{2,5\}$ 에 대하여
$(A\cup B)^c \subset X, (A-B)^c \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

$(A\cup B)^c=\{4\}, (A-B)^c=\{2,4,5\}$
$(A\cup B)^c \subset X \subset (A-B)^c$, 즉 $\{4\}\subset X \subset \{2,4,5\}$ 이다.
따라서 집합 X 의 개수는 $2\times 2=4$(개) 이다.

14. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 6 이하의 자연수$\}$, $B = \{x \mid x$는 10 이하의 홀수$\}$ 에 대하여 다음 조건을 모두 만족하는 집합 X 의 개수는?

I. $A \cap X = X$ II. $(A - B) \cup X = X$

① 2개 ② 4개 ③ 8개 ④ 16개 ⑤ 32개

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 이고 $(A - B) \subset X \subset A$ 이다.

따라서 $\{2, 4, 6\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이므로

집합 X 의 개수는 $2 \times 2 \times 2 = 8$(개) 이다.

15. 전체집합 $U = \{x \mid x$는 10 이하의 홀수$\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 5, 7\}, B = \{3, 7\}$ 에 대하여 $B \cup X = X, (A - B) \cap X = \{5\}$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?(단, X 는 U 의 부분집합이다.)

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$\{3, 7\} \cup X = X, \{1, 5\} \cap X = \{5\}$ 이므로
$\{3, 7\} \subset X, 1 \notin X, 5 \in X$ 이다.
따라서 $\{3, 5, 7\} \subset X \subset \{3, 5, 7, 9\}$ 이다.
따라서 집합 X 의 개수는 $2 = 2$(개)이다.

16. 전체집합 $U = \{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x|x$는 짝수$\}$,
$B = \{x \mid x$는 5의 배수$\}$ 에 대하여 $(A \cup B)^c \subset X, (A - B)^c \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{5, 10\}$ 이고 $(A \cup B)^c = \{1, 3, 7, 9\}, (A - B)^c = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ 이다.
따라서 $(A \cup B)^c \subset X \subset (A - B)^c$ 이므로 집합 X 의 개수는 $2 \times 2 = 4$(개) 이다.

17. 다음 중 조건 p 가 조건 q 의 필요조건인 것은 ? (단, x, y, z 는 모두 실수)

① p : $x > 0,\ y > 0,$ q : $x + y > 0,\ xy > 0$

② p : $x < 1,$ q : $0 < x < 1$

③ p : $x < 0,$ q : $x + |x| = 0$

④ p : $x > y,$ q : $xz > yz$

⑤ p : $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1,$ q : $x + y \geq 2$

해설

① $p \to q,\ q \to p$
② $p \not\to q,\ q \to p$ (반례 : $x = -1$)
③ $p \to q,\ q \not\to p$ (반례 : $x = 0$)
④ $z > 0$ 일 때, $z > 0$일 때, $p \to q,\ q \to p$ $z \leq 0$ 일 때, $p \not\to q,$ $q \not\to p$
⑤ $p \to q,\ q \not\to p$

18. 네 집합 A, B, C, D 가 $A \subset B,\ C \subset D$ 를 만족시킬 때, 다음 (1), (2) 의 $\boxed{}$ 안에 들어갈 내용을 <보기> 에서 찾아 차례로 나열한 것을 고르면?

㉠ $B \subset C$ 인 것은 $A \subset D$ 이기 위한 $\boxed{}$
㉡ $B \cap D \neq \varnothing$ 인 것은 $A \cap C \neq \varnothing$ 이기 위한 $\boxed{}$

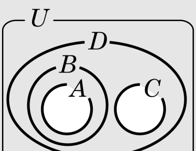
보기

Ⅰ. 필요조건이나, 충분조건은 아니다.
Ⅱ. 충분조건이나, 필요조건은 아니다.
Ⅲ. 필요충분조건이다.
Ⅳ. 아무 조건도 아니다.

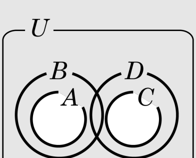
① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅲ ③ Ⅱ, Ⅰ ④ Ⅱ, Ⅳ ⑤ Ⅲ, Ⅱ

해설

㉠ $B \subset C$ 이면 $A \subset B \subset C \subset D$
$(\because\ A \subset B,\ C \subset D)\ \therefore\ A \subset D$
그러나 $A \subset D$ 이면 $B \subset C$ 는 성립하지 않는다. 따라서, 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
[반례]



㉡ $B \cap D \neq \varnothing \nRightarrow A \cap C \neq \varnothing$ [반례]



19. 다음에서 조건 p가 조건q 이기 위한 필요조건이고 충분조건은 아닌 것을 골라 기호로 써라. (단,a, b 는 실수)

㉠ $p\ :\ A \cup B = B,\ q\ :\ A \subset B$
㉡ $p\ : a^2 + b^2 = 0,\ q\ :\ a = 0$ 이고 $b = 0$
㉢ $p\ : a^2 = b^2\ q\ :\ a = b$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

㉢ $p : a^2 = b^2 \leftarrow q : a = b$
$\therefore\ p$는 q이기 위한 필요조건

20. x, y가 실수일 때. $|x| + |y| = |x + y|$가 되기 위한 필요충분조건을 구하면?

① $xy = 0$ ② $xy > 0$ ③ $xy \geq 0$

④ $xy < 0$ ⑤ $xy \leq 0$

해설

양변을 제곱하면 $x^2 + y^2 + 2|xy| = x^2 + y^2 + 2xy$

$\therefore$ $|xy| = xy$ 가 성립하려면 $xy \geq 0$ 일 때이다.

21. 다음 두 조건 $p : 2 \leq x \leq 5$, $q : x \geq a$ 에 대하여 p 는 q이기 위한 충분조건이 되도록 상수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 각각의 진리집합을 P, Q 라 할 때, $P \subset Q$ 이 성립해야 한다. 따라서 $2 \leq x \leq 5$ 를 만족하는 영역은 $x \geq a$를 만족하는 영역에 포함되어야 함으로 $a \leq 2$
따라서 a의 최댓값은 2

22. 두 조건 $p(x)$: $|x-a| \le 1$, $q(x)$: $-1 < x < 2,\ 3 \le x \le 5$ 에 대하여 $p(x)$ 가 $q(x)$ 이기 위한 충분조건일 때, 정수 a 의 개수는?

① 5 개 ② 4 개 ③ 3 개 ④ 2 개 ⑤ 1 개

해설

두 조건 $p(x)$, $q(x)$ 의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P = \{x | a-1 \le x \le a+1\}$, $Q = \{x | -1 < x < 2,\ 3 \le x \le 5\}$ $p(x)$ 가 $q(x)$ 이기 위한 충분조건이면 $P \subset Q$ 이어야 하므로

(i) $-1 < a-1$ 이고 $a+1 < 2$,

즉 $0 < a < 1 \cdots$ ㉠

(ii) $3 \le a-1$ 이고 $a+1 \le 5$, 즉 $a = 4 \cdots$ ㉡

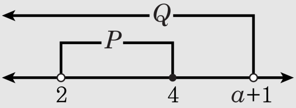
㉠ , ㉡ 에서 정수 a는 4뿐이므로 1개이다.

23. 두 조건 $p: 2 < x \le 4, q: x < a+1$에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건 일 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a > 3$

해설



$p \to q$이므로 $a+1 > 4 \Rightarrow a > 3$

24. 실수 x에 대하여 $|x-1|<a$가 $-2<x<6$이기 위한 충분조건일 때, a의 최댓값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$|x-1|<a \rightarrow -a+1<x<a+1$, $-a+1<x<a+1$이 $-2<x<6$ 범위 안에 포함되어야 한다.

$-2 \leq -a+1 \rightarrow a \leq 3$, $a+1 \leq 6 \rightarrow a \leq 5 \therefore \quad a \leq 3$

25. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 $P = \{x \mid x \le a\}$, $Q = \{x \mid x \le -1,\ 2 \le x \le 4\}$ 라 하면 p는 q이기 위한 필요조건이다. 상수 a 의 최솟값은 얼마인가?

① -2 ② -1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 5

해설

필요조건을 만족시키기 위해서는 P 의 집합이 Q 의 집합을 포함해야 하므로 최솟값은 4 가 된다.

26. 세 조건 a, b, c 를 만족하는 값들의 집합을 각각 A, B, C 라고 할 때, $A=\{2p\}$, $B=\left\{p^2+1,\ 4\right\}$, $C=\{4,\ 2p+1\}$ 이다. a 가 b 이기위한 충분조건이고, b 는 c 이기위한 필요충분조건일 때, p 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$a \Rightarrow b$ 이므로

$2p=p^2+1$ 또는 $2p=4$

$b \Leftarrow c$ 이므로 $2p+1=p^2+1$

$\therefore\ p^2-2p=0$

따라서 $p=0$ 또는 $p=2$

$p=0$ 이면 $2\times 0 \neq 0+1$ 이고 $2\times 0 \neq 4$ 이므로

$p=2$

27. 두 조건 p, q에 대하여 $\sim q$는 p이기 위한 필요조건이다. 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 할 때, 다음 중 옳은 것은? (단, U는 전체집합이다.)

① $P \cap Q = \varnothing$ ② $P \cup Q = U$ ③ $P \subset Q$

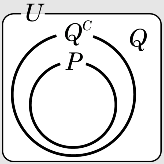
④ $Q \subset P$ ⑤ $Q^c = P$

해설

$P \subset Q^c \Rightarrow P - Q^c = \varnothing \Rightarrow P \cap (Q^c)^c = \varnothing$

$\therefore P \cap Q = \varnothing$

벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



28. 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $a > 0,\ b > 0$ 이면 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

② 모든 실수 a, b 에 대하여 $|a| + |b| > a + b$

③ 모든 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 > ab$

④ 모든 실수 a, b 대하여 $|a - b| \le |a| - |b|$

⑤ $a > b > 0$ 일 때, $\sqrt{a-b} < \sqrt{a} - \sqrt{b}$

해설

① : $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$, 양변을 제곱하면
$a + b + 2\sqrt{ab} > a + b$
$\Rightarrow \quad 2\sqrt{ab} > 0$ (참)
② ④ ⑤ : 모두 양변을 제곱하여 정리해 본다.
③ : (반례) $a = 0,\ b = 0$

29. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿개

▷ 정답 : 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{50^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$\therefore n = 1,\ 2$

n의 갯수는 2개이다.

30. $a > 0,\ b > 0$ 일 때, $(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$$(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right) = 16+1+\frac{8b}{a}+\frac{2a}{b}$$

$a > 0,\ b > 0$ 이므로 $\frac{8b}{a}+\frac{2a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{8b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} = 8$

$\therefore$ 최솟값은 $17+8=25$

31. 한 자리의 자연수 $l,\ m,\ n$에 대하여 $\{l,\ m,\ n\} = \{p,\ q,\ r\}$가 성립한다고 한다. 이 때, $\dfrac{l}{p} + \dfrac{m}{q} + \dfrac{n}{r}$의 최소값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} \geq 3 \times 3\sqrt{\frac{l}{p} \times \frac{m}{q} \times \frac{n}{r}}$$

그런데 $\{l, m,\ n\} = \{p, q, r\}$이므로

$lmn = pqr$이다.

따라서, $\dfrac{l}{p} + \dfrac{m}{q} + \dfrac{n}{r} \geq 3$

(단, 등호는 $l = p,\ m = q,\ n = r$일 때 성립)

$\therefore$구하는 최소값은 3

32. 네 실수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d=8$, $a^2+b^2+c^2+d^2=124$가 성립할 때, 실수 d의 최솟값 m과 최댓값 M의 합 $m+M$의 값은?

① -7 ② -3 ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$a+b+c+d=8$, $a^2+b^2+c^2+d^2=124$

$a+b+c=8-d$, $a^2+b^2+c^2=124-d^2$

코시-슈바르츠 부등식에서

$(1+1+1)(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$이므로

$3(124-d^2) \geq (8-d)^2$

$372-3d^2 \geq d^2-16d+64$

$4d^2-16d+64-372 \leq 0$

$4d^2-16d-308 = d^2-4d-77 \leq 0$

$\therefore (d-11)(d+7) \leq 0$

$\therefore -7 \leq d \leq 11$

따라서 최솟값 $m=-7$, 최댓값 $M=11$

이므로 $m+M=-7+11=4$

33. 집합 $A = \{x \mid x$는 8 의 약수$\}$일 때, 다음 조건을 모두 만족하는 집합 P의 갯수를 구하여라.

$P \subset A$ $1 \in P$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8 개

해설

집합 A를 원소나열법으로 나타내면
$A = \{1, 2, 4, 8\}$이고, 조건에서
$P \subset A$이고 1을 원소로 가지는 집합 P를 구하면 $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 8\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 8\}$, $\{1, 4, 8\}$, $\{1, 2, 4, 8\}$이므로, 개수는 모두 8 개 이다.

34. 두 집합 $A = \{x|x$는 10 이상 15 이하의 자연수$\}$, $B = \{x|x$는 12 이상 18 미만의 3 의 배수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

조건

$X \subset A$, $B \subset X$, $n(X) = 4$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 6 개

해설

$A = \{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$

$B = \{12,\ 15\}$

$X \subset A$, $B \subset X$ 이므로 $B \subset X \subset A$

$\{12,\ 15\} \subset X \subset \{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$

집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 12, 15 는 반드시 포함하고 원소의 개수가 4 개인 집합이므로

$\{10,\ 11,\ 12,\ 15\}$, $\{10,\ 12,\ 13,\ 15\}$,

$\{10,\ 12,\ 14,\ 15\}$, $\{11,\ 12,\ 13,\ 15\}$,

$\{11,\ 12,\ 14,\ 15\}$, $\{12,\ 13,\ 14,\ 15\}$ 의 6 개이다.

35. 세 개의 원소로 된 집합 $A=\{1,\ 3,\ 4\}$ 에서 조건 $X \subset Y \subset A$ 를 만족하는 집합 $X,\ Y$ 를 만들 수 있는 경우의 수는? (단, 집합 X 의 원소의 개수는 1 개 이상이다.)

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

해설

(i) $X=\{1\}$ 일 때 집합 Y 는 원소 1 을 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 개수는 $2^2=4$ (개)

$X=\{3\}$, $X=\{4\}$ 일 때도 마찬가지이므로 $3\times4=12$ (개)

(ii) $X=\{1,\ 3\}$ 일 때 집합 Y 는 원소 1, 3 을 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 개수는 $2^1=2$ (개)

$X=\{1,\ 4\}$, $X=\{3,\ 4\}$ 일 때도 마찬가지 이므로 $2\times3=6$ (개)

(iii) $X=\{1,\ 3,\ 4\}$ 일 때 $Y=\{1,\ 3,\ 4\}$ 뿐이므로 1 개

$\therefore$ 19 개

36. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 부분집합의 개수가 32 개일 때, 자연수 n 의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 2^{n-3} 개이다.

$2^{n-3} = 32,\ 2^{n-3} = 2^5$

$n - 3 = 5$ 이므로 $n = 8$

37. 전체집합 $U = \{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여

$A = \{1, 3, 5, 7\}, A \cap B = \{3, 5\}, B \cap A^c = \{2, 4, 6\}, A^c \cap B^c = \{8, 9, 10\}$

일 때, B^c 은?

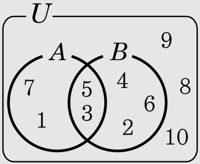
① $\{1, 7\}$ ② $\{1, 8\}$ ③ $\{1, 7, 9, 10\}$

④ $\{1, 7, 8, 10\}$ ⑤ $\{1, 7, 8, 9, 10\}$

해설

$B \cap A^c = \{2, 4, 6\} = B - A$ 이므로

$B^c = U - B = \{1, 7, 8, 9, 10\}$ 이다.



38. 전체집합 $U=\{x|x$는 20이하의 소수$\}$ 에 대하여 $A=\{2,\ 7,\ 11\}$, $B=\{3,\ 7,\ 11,\ 17\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $A\cap B=\{7,\ 11\}$

② $A\cap B^c=\{2\}$

③ $A^c\cap B=\{3,\ 17\}$

④ $A^c\cup B^c=\{2,\ 3,\ 9,\ 13,\ 17,\ 19\}$

⑤ $A^c\cap B^c=\{5,\ 13,\ 19\}$

해설

$U=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$,
$A=\{2,\ 7,\ 11\}$, $B=\{3,\ 7,\ 11,\ 17\}$
② $A\cap B^c=A-B=\{2\}$
③ $A^c\cap B=B-A=\{3,\ 17\}$
④ $A^c\cup B^c=(A\cap B)^c=\{2,\ 3,\ 5,\ 13,\ 17,\ 19\}$
⑤ $A^c\cap B^c=(A\cup B)^c=\{5,\ 13,\ 19\}$

39. 전체집합 $U=\{x|x$는 한 자리 자연수$\}$ 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $A^c=\{6,\ 7,\ 8,\ 9\}$, $A^c\cap B^c=\{7,\ 9\}$ 일 때, $(A-B)^c$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{2,4,6,7,8,9\}$

해설

$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$A=U-A^c=\{1,2,3,4,5\}$이므로

$A-B=\{1,3,5\}$

$\therefore (A-B)^c=\{2,4,6,7,8,9\}$

40. 전체집합 $U = \{x | x$는 8 이하의 자연수$\}$ 의 세 부분집합 $A = \{x | x$는 8 이하의 홀수$\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$, $C = \{1, 5\}$ 가 있다.
전체집합 U 의 두 부분집합 X, Y 에 대하여 $X \circ Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$ 이라 할 때, $(A \circ B) \circ C$ 는?

① $\{1, 3\}$ ② $\{1, 5\}$ ③ $\{1, 7\}$
④ $\{1, 2, 5\}$ ⑤ $\{1, 2, 6, 7\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 3, 5, 7\}$ 이다.
$X \circ Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c) = (X \cup Y) - (X \cap Y)$ 이므로
$A \circ B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\} - \{1, 3\} = \{2, 5, 6, 7\}$ 이다.
따라서 $(A \circ B) \circ C = \{1, 2, 5, 6, 7\} - \{5\} = \{1, 2, 6, 7\}$ 이다.

41. 다음 중에서 p는 q이기 위한 필요조건이고 충분조건은 아닌 것을 고르면? (단, 모든 문자는 실수)

① $p : a > 3,\ q : a^2 > 9$

② $p : a^2 = ab,\ q : a = b$

③ $p : |a| < |b|,\ q : a < b$

④ $p : |x-1| = 2,\ q : x^2 = -2$

⑤ $p : x = 1$ 이고 $y = 1,\ q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$

해설

① 충분조건
③ 아무런 조건관계가 아니다.
④ 아무런 조건관계가 아니다. 진리집합을 구해보면 $P = \{-1,\ 3\}$, $Q = \phi$ 에서 $P \supset Q$ 관계로 보아 필요조건이라고 하지 않도록 주의하자.
⑤ 필요충분조건

42. 다음 중 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)=B\cap A^c$가 성립하기 위한 필요충분조건은? (단, A^c는 전체집합 U에 대한 A의 여집합)

① $A=B$ ② $B\subset A$ ③ $A\subset B$

④ $A\cap B=\varnothing$ ⑤ $A\cup B=\varnothing$

해설

$(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)=(A\cup B)\cap(A\cap B)^c=(A-B)\cup(B-A)$
따라서 $(A-B)\cup(B-A)=B\cap A^c$ 에서 $(A-B)\cup(B-A)=B-A$
가 성립하려면 $(A-B)\subset(B-A)$ 이어야 하는데 $A-B$와 $B-A$
는 서로소이므로 $A-B=\varnothing$ $\therefore A\subset B$

43. 세 조건 p, q, r 에 대하여 $\sim p \Rightarrow q$, $r \Rightarrow \sim q$ 일 때, 조건 p 가 r 이기 위한 필요충분조건이려면 다음 중 어떤 조건이 더 필요한가?

① $p \Rightarrow q$　　② $q \Rightarrow r$　　③ $p \Rightarrow r$

④ $\sim q \Rightarrow p$　　⑤ $\sim r \Rightarrow p$

해설

$r \Rightarrow \sim q$ 이므로 $q \Rightarrow \sim r$

$\sim p \Rightarrow q$ 이고 $q \Rightarrow \sim r$ 이므로 삼단논법에 의하여 $\sim p \Rightarrow \sim r$

$\therefore\ r \Rightarrow p$

따라서, $p \Leftrightarrow r$가 되려면 $r \Rightarrow p$ 이외에 $p \Rightarrow r$ 가 더 필요하다.

44. x, y 가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 아닌 것을 모두 고른 것은?

㉠ $x+1>0$	㉡ $x^2+xy+y^2 \geq 0$
㉢ $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$	㉣ $\lvert x+y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$

① ㉠ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x>-1$ 일 때만 성립한다.

㉡ $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \geq 0$

(단, 등호는 $x=y=0$ 일 때 성립)

㉢ $(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2-\lvert x-y\rvert^2$

$=\lvert x\rvert^2+2\lvert x\rvert\lvert y\rvert+\lvert y\rvert^2-(x-y)^2$

$=2(\lvert xy\rvert+xy) \geq 0$

$\therefore (\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2 \geq \lvert x-y\rvert^2$

(단, 등호는 $xy \leq 0$ 일 때 성립)

㉣ (반례) $x=2, y=-3$ 일 때

$\lvert 2+(-3)\rvert=1, \lvert 2-(-3)\rvert=5$ 이므로

$\lvert x+y\rvert<\lvert x-y\rvert$

따라서 절대부등식이 아닌 것은 ㉠, ㉣ 이다.

45. 다음은 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$을 만족하는 두 양수 x, y에 대하여 $x+y$의 최솟값을 구하는 풀이이다. 적절하지 못한 부분은?

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{4}{y}}\cdots ㉠$$
$$=\frac{4}{\sqrt{xy}}$$
$$\therefore\quad \sqrt{xy}\geq 4\cdots ㉡$$
$$\therefore\quad x+y\geq 2\sqrt{xy}\geq 2\cdot 4=8\cdots ㉢$$
따라서 $x+y$의 최솟값은 8이다. ······㉣

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉣　⑤ 틀린 곳이 없다.

해설

㉠에서 등호가 성립하는 경우는 $\frac{1}{x}=\frac{4}{y}$

즉 $y=4x$일 때이고,
㉢에서 등호가 성립하는 경우는
$x=y$일 때이므로 서로 일치하지 않는다.
따라서 $x+y$의 최솟값은 8이 될 수 없다.

46. $a > 1$일 때, $\dfrac{1}{a-1} + 4a - 3$의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\frac{1}{a-1} > 0$$

$$4(a-1) + 1 + \frac{1}{a-1} \geq 2 \cdot \sqrt{4(a-1) \cdot \frac{1}{(a-1)}} + 1$$

$$= 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

47. $x+y+z=4, x^2+y^2+z^2=6$을 만족하는 실수 $x,\ y, z$에 대하여 x가 취할 수 있는 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\dfrac{M}{m}$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x+y+z=4$에서 $y+z=4-x \cdots$ ㉠

$x^2+y^2+z^2=6$에서 $y^2+z^2=6-x^2 \cdots$ ㉡

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(y^2+z^2) \geq (y+z)^2$

(단, 등호는 $y=z$ 일 때 성립)

㉠, ㉡을 대입하면

$2(6-x^2) \geq (4-x)^2,\ 3x^2-8x+4 \leq 0$

$(3x-2)(x-2) \leq 0 \quad \therefore \dfrac{2}{3} \leq x \leq 2$

따라서 $M=2,\ m=\dfrac{2}{3}$이므로 $\dfrac{M}{m}=3$

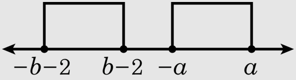
48. 두 집합 A, B 가 $A=\{x \mid x^2-a^2 \le 0\}$, $B=\{x \mid |x+2| \le b\}$ 일 때, $A \cap B = \varnothing$ 이기 위한 필요충분조건은? (단, $a>0$, $b>0$)

① $ab=2$ ② $ab=4$ ③ $a+b>2$

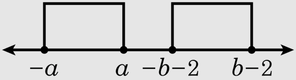
④ $a+b<4$ ⑤ $a+b<2$

해설

$A=\{x \mid x^2-a^2 \le 0\}=\{x \mid -a \le x \le a\}$ $B=\{x \mid |x+2| \le b\}$ $=\{x \mid -b-2 \le x \le b-2\}$ $A \cap B = \varnothing$ 이기 위해서는 그림과 같아야 한다.



또는



그런데 $a>0$, $b>0$ 에서 $-b-2<0$ 이므로아래 수직선의 경우는 모순이다. 위의 수직선에서 $b-2<-a$ 이므로 만족하는 조건은 $a+b<2$ $(\because a>0, b>0)$

49. x, y가 실수일 때, $x^2+2xy+3y^2-4x+4y+14$의 최솟값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$x^2+2(y-2)x+3y^2+4y+14$
$=(x+y-2)^2-(y-2)^2+3y^2+4y+14$
$=(x+y-2)^2+2y^2+8y+10$
$=(x+y-2)^2+2(y+2)^2+2\geq 2$
따라서 $x=6, y=-4$ 일 때, 최솟값은 2

해설

위의 방법은 완전제곱꼴로 묶을 수 있는 특수한 경우에 사용할 수 있는 좀 더 쉬운 풀이이고 일반적인 경우의 해법은 좀 더 복잡하다.
$x^2+2xy+3y^2-4x+4y+14\geq k$ 라고 하면
$x^2+2xy+3y^2-4x+4y+14-k\geq 0$
이 모든 실수 x, y에 대해 성립하므로
x에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 판별식을 사용하면
$x^2+2(y-2)x+3y^2+4y+14-k\geq 0$
$D/4=-2y^2-8y-10+k\leq 0$
$2y^2+8y+10-k\geq 0$ 이고 모든 y에 대해 성립하는 절대부등식이므로
$D/4=16-20+2k\leq 0$
$\therefore k\leq 2$
따라서 준식의 최솟값은 k의 최댓값인 2이다.

50. 양수 a, b에 대하여 다음 식 $a^2+b+\dfrac{16}{2a+b}$의 최솟값과 그 때의 a, b의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최솟값$=7$

▷ 정답 : $a=1$

▷ 정답 : $b=2$

해설

$a^2+b+\dfrac{16}{2a+b}$

$=-1+(a^2-2a+1)+2a+b+\dfrac{16}{2a+b}$

$=-1+(a-1)^2+(2a+b+\dfrac{16}{2a+b}) \quad \cdots \quad ①$

$2a+b+\dfrac{16}{2a+b} \geq 2\sqrt{(2a+b)(\dfrac{16}{2a+b})}=8$에서

등호는 $2a+b=\dfrac{16}{2a+b}$ 일 때 성립하고

이때, $2a+b=4$ (a, b는양수) $\cdots$ ②

①에서 최소는 $a=1$ 일 때이다.

$\therefore$ ②에서 $a=1, b=2$일 때 최솟값 : 7