

1. 다음 보기는 제주도의 숙박시설들의 모임이다. 호텔의 모임을 A , 콘도의 모임을 B , 펜션의 모임을 C 라고 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

보기

호텔 : 으뜸 호텔, 오떼 호텔

콘도 : 카나 콘도, 자연 파크 리조트

펜션 : 지중해 펜션, 삼다도 펜션, 차구도 펜션, 월령 코지

① 오떼 호텔 $\in A$

② 카나 콘도 $\notin A$

③ 으뜸 호텔 $\notin A$

④ 삼다도 펜션 $\in C$

⑤ 월령 코지 $\notin B$

해설

으뜸 호텔 $\in A$

2. 다음 각 집합을 조건제시법으로 바르게 나타낸 것을 보기에서 골라라.

보기

- ㉠ $\{x|x\text{는 } 10 \text{ 이하의 짝수}\}$
- ㉡ $\{x|x\text{는 } 10\text{보다 작은 } 2\text{의 배수}\}$
- ㉢ $\{x|x\text{는 } 24\text{의 약수}\}$
- ㉣ $\{x|x\text{는 } 18\text{의 약수}\}$
- ㉤ $\{x|x\text{는 } 36\text{의 배수}\}$

(1) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

(2) $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

해설

조건제시법은 집합에 속하는 모든 원소들이 가지는 공통된 성질을 제시하여 나타내는 방법이다.

(1) 집합의 원소들의 공통된 성질은 10 이하의 짝수(2의 배수)라는 점이고

(2) 집합의 원소들의 공통된 성질은 18의 약수라는 점이다.

3. 다음 중 무한집합을 모두 골라라.

㉠ $A = \{x \mid x \text{는 아시아에 속하는 국가}\}$

㉡ $B = \{x \mid x \text{는 } 100 \text{보다 큰 자연수}\}$

㉢ $C = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이상의 자연수}\}$

㉣ $D = \{x \mid x \text{는 방위의 종류}\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉡

▶ 정답 : ㉢

해설

㉠ $A = \{\text{대한민국, 일본, 중국, } \dots, \text{싱가포르}\}$: 유한집합

㉡ $B = \{100, 101, 102, \dots\}$: 무한집합

㉢ $C = \{20, 21, 22, 23, 24, \dots\}$: 무한집합

㉣ $D = \{\text{동, 서, 남, 북}\}$: 유한집합

4. 어떤 두 집합 A, B 사이의 포함관계가 $A \subset B$ 이다. 이 때, 집합 A, B 가 될 수 없는 것을 모두 골라라.

① $A = \{x|x\text{는 } 10\text{보다 작은 짝수}\}, B = \{x|x\text{는 } 2\text{의 배수}\}$

② $A = \{x|x\text{는 } 9\text{의 배수}\}, B = \{x|x\text{는 } 3\text{의 배수}\}$

③ $A = \{x|x\text{는 } 12\text{의 약수}\}, B = \{x|x\text{는 } 6\text{의 약수}\}$

④ $A = \{x|x\text{는 } 10\text{ 이하의 홀수}\}, B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

⑤ $A = \{x|x\text{는 소수}\}, B = \{x|x\text{는 홀수}\}$

해설

① $A = \{2, 4, 6, 8\}, B = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\} \therefore A \subset B$

② $A = \{9, 18, 27, \dots\}, B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots\} \therefore A \subset B$

③ $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, B = \{1, 2, 3, 6\} \therefore A \not\subset B$

④ $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \therefore A \subset B$

⑤ $A = \{2, 3, 5, 7, \dots\}, B = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} \therefore A \not\subset B$

5. 다음 집합 중에서 집합 $\{a, b, c\}$ 의 부분집합을 모두 골라라.

㉠ $\{a\}$

㉡ $\{b, d\}$

㉢ $\{a, b, c\}$

㉣ $\emptyset$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉣

해설

집합 $\{a, b, c\}$ 의 부분집합을 모두 구하면 $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$ 이다.

6. 다음 중 두 집합이 서로 같은 것은?

① $A = \{x | x \text{는 } 4 \text{의 배수}\},$
 $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$

② $A = \{1, 3, 6, 4, 2, 9, 12\},$
 $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

③ $A = \{x | x \text{는 } 5 \text{의 배수}\},$
 $B = \{5, 10, 15, 20 \cdots\}$

④ $A = \{\emptyset\},$
 $B = \emptyset$

⑤ $A = \{x | x \text{는 } 2 \text{의 배수}\},$
 $B = \{x | x \text{는 } 4 \text{의 배수}\}$

해설

①, ②, ④, ⑤에서 두 집합 사이의 관계는 $B \subset A, A \not\subset B$ 이다

7. 집합 $A = \{1, 2, \{2\}, \{1, 3\}\}$ 의 진부분 집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 15 개

해설

진부분집합은 자기자신을 포함하지 않는 부분집합이다.

집합 A 의 원소개수가 4 개이다.

진부분집합의 개수 : $2^4 - 1 = 15$ (개)

8. 집합 $A = \{m, a, t, h\}$ 에 대하여 부분집합 중 모음을 원소로 포함하지 않는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8 개

해설

집합 A 에서 모음은 a 이므로 집합 A 의 부분집합 중 a 를 포함하지 않는 부분집합을 구하면

$\emptyset, \{m\}, \{t\}, \{h\}, \{m, t\}, \{m, h\}, \{t, h\}, \{m, t, h\}$ 이고 총 8개이다.

9. 두 집합 A, B 가 다음의 관계를 만족할 때, 집합 B 로 가능한 것은?

A	B	$A \cup B$
$\{a, e\}$		$\{a, e, i, o, u\}$

① $\{i, o\}$

② $\{i, o, u\}$

③ $\{a, e, i\}$

④ $\{a, i, u\}$

⑤ $\{a, o, u\}$

해설

$A = \{a, e\}$, $A \cup B = \{a, e, i, o, u\}$ 이므로 $\{i, o, u\} \subset B \subset \{a, e, i, o, u\}$ 이다.

10. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{의 약수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 15 \text{보다 작은 } 3 \text{의 배수}\}$ 일 때, $B - A$ 은?

① {3}

② {5}

③ {9}

④ {3, 5}

⑤ {6, 12}

해설

$A = \{1, 3, 9\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$ 이므로
따라서 $B - A = \{6, 12\}$ 이다.

11. 다음 중 명제 ' $x + y \geq 2$ 이고 $xy \geq 1$ 이면, $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$ 이다.' 가 거짓임을 보이는 반례는?

① $x = 1, y = \frac{1}{2}$

② $x = 100, y = \frac{1}{2}$

③ $x = 1, y = 1$

④ $x = 2, y = 4$

⑤ $x = -1, y = -5$

해설

$x + y \geq 2, xy \geq 1$ 는 만족하지만, $x \geq 1, y \geq 1$ 은 만족하지 않는 반례를 찾는다.

$\therefore x = 100, y = \frac{1}{2}$ 일 때, 거짓이다.

12. 두 양수 a, b 에 대하여 $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right)$ 의 최솟값은?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

a, b 는 양수이므로

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + 4 + 1 + \frac{4}{ab}$$

$$= 5 + ab + \frac{4}{ab} \geq 5 + 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}}$$

$$= 5 + 4 = 9$$

$\therefore$ 최솟값은 9

13. $x \geq 0, y \geq 0$ 이고 $x + 3y = 8$ 일 때, $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은?

① 2

② 3

③ $\sqrt{10}$

④ $\sqrt{15}$

⑤ 4

해설

x, y 가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\begin{aligned}(\sqrt{x} + \sqrt{3y})^2 &\leq (1^2 + 1^2)(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{3y})^2 \\ &= 2(x + 3y)\end{aligned}$$

$= 16$ (단, 등호는 $x = 3y$ 일 때 성립)

그런데 $\sqrt{x} + \sqrt{3y} \geq 0$ 이므로

$$0 \leq \sqrt{x} + \sqrt{3y} \leq 4$$

따라서 $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은 4이다.

14. 1보다 큰 자연수 x 에 대하여 $f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$ 로 정의 할 때, $f(25)$ 의

값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 26

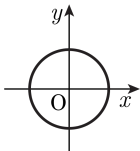
해설

$$f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{\frac{x - 1}{x}} = x + 1$$

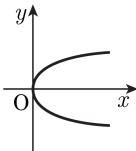
$$\therefore f(25) = 26$$

15. 다음 그래프 중 역함수가 존재하는 함수의 그래프가 될 수 있는 것은?

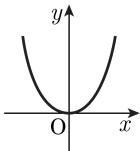
①



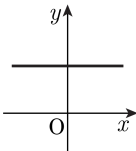
②



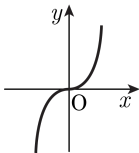
③



④



⑤



해설

일대일 대응의 정의에 의해 ⑤번이다.

16. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때, 조건 p 를 만족시키는 집합 P 와 조건 q 를 만족시키는 집합 Q 사이의 포함 관계를 옳게 나타낸 것은?

① $Q \subset P$

② $Q^c \subset P^c$

③ $Q \subset P^c$

④ $Q^c \subset P$

⑤ $Q = P^c$

해설

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

$$\therefore Q^c \subset P^c$$

17. 다음 중 명제의 대우가 참인 것은?

- ① x 가 유리수이면 x^2 은 유리수이다.
- ② 두 직사각형의 넓이가 같으면 두 직사각형은 합동이다.
- ③ $x^2 = y^2$ 이면 $x = y$ 이다.
- ④ 닮음인 두 삼각형은 합동이다.
- ⑤ x 또는 y 가 무리수이면 $x + y$ 가 무리수이다.

해설

명제의 대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

18. 다음 ()안에 알맞은 말을 쓰시오.

이등변삼각형 ABC는 정삼각형이기 위한 ()조건이다.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

이등변삼각형이 정삼각형을 포함한다.

19. 다음 중 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은? (a, x, y, z 는 모두 실수)

① $p : a < b, \quad q : |a| < |b|$

② $p : 2x + 3 = 5, \quad q : x^2 - 2x + 1 = 0$

③ $p : a > 3, \quad q : a^2 > 9$

④ $p : x > 0$ 이고 $y > 0, \quad q : x + y > 0$

⑤ $p : xy = yz, \quad q : x = z$

해설

주어진 명제도 참이고 역도 참인 것을 고른다.

① 주어진 명제, 역 모두 거짓이다.

② p, q 를 만족하는 값이 모두 $x = 1$ 이므로 필요충분조건이다.

③, ④ 주어진 명제만 참이고 역은 성립하지 않는다. $\therefore p$ 는 q 이기 위한 충분조건이다.

⑤ 주어진 명제는 거짓이고 역은 참이다.

$\therefore p$ 는 q 이기 위한 필요조건이다.

20. $x - 4 = 0$ 이 $x^2 + ax - 48 = 0$ 이기 위한 충분조건일 때, 실수 a 의 값은?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + ax - 48 = 0$$

$$\therefore 16 + 4a - 48 = 0$$

$$\therefore a = 8$$

21. $q > p > 1$ 인 실수 p, q 에 대하여 $pq + p$ 와 $p^2 + q$ 의 대소를 비교하면?

① $pq + p < p^2 + q$

② $pq + p \leq p^2 + q$

③ $pq + p > p^2 + q$

④ $pq + p \geq p^2 + q$

⑤ $pq + p = p^2 + q$

해설

$$\begin{aligned}(pq + p) - (p^2 + q) &= pq - q - p^2 + p \\ &= q(p - 1) - p(p - 1) \\ &= (p - 1)(q - p)\end{aligned}$$

$q > p > 1$ 이므로 $p - 1 > 0$, $q - p > 0$

따라서 $(p - 1)(q - p) > 0$ 이므로

$$pq + p > p^2 + q$$

22. 방정식 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ 을 만족하는 양의 정수 x, y 에 대하여 xy 의 최솟값은?

- ① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

해설

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}, \quad \frac{1}{4} \geq \sqrt{\frac{1}{xy}}$$

$$\therefore \frac{1}{16} \geq \frac{1}{xy}$$

따라서 $xy \geq 16$ 이므로 xy 의 최솟값은 16

23. $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 이라 한다. X 의 임의의 원소 x 에 대하여 다음과 같은 X 에서 Y 로의 대응을 생각할 때, 이 중 X 에서 Y 로의 함수인 것은?

① $x \rightarrow x + 3$

② $x \rightarrow x^2 - 1$

③ $\begin{cases} x \geq 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 1 \\ x < 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 0 \end{cases}$

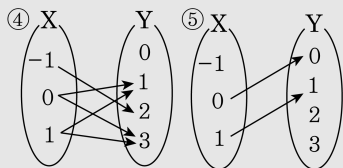
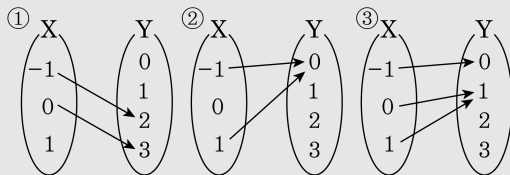
④ $\begin{cases} x \geq 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow \text{홀수} \\ x < 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 2 \end{cases}$

⑤ $x \rightarrow x^3$

해설

X 에서 Y 로의 함수가 되려면 X 의 원소가 빠짐없이 Y 의 원소 하나에 대응해야 한다.

순서대로 대응도를 만들어 보면 다음과 같다.



①, ②, ⑤는 Y 의 원소에 대응하지 않는 X 의 원소가 존재하므로 함수가 될 수 없고 ④는 X 의 원소 하나가 Y 의 원소 두 개에 대응하는 경우가 생기므로 역시 함수가 될 수 없다.

24. 실수 x, y 에 대하여 $f(xy) = f(x)f(y)$ 이고 f 가 일대일대응일 때, $f(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

0이 아닌 x 에 대하여 $y = 0$ 을

$f(xy) = f(x)f(y)$ 에 대입하자.

$$f(0) = f(x)f(0) \Leftrightarrow f(0) - f(0)f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(0)[1 - f(x)] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ 또는 } f(x) = 1$$

만일 $f(x) = 1$ 이면

$$f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 1, \dots \text{ 이다.}$$

위는 $f(x)$ 가 일대일대응이라는 것과 모순이므로

$$f(x) = 1 \text{ 은 부적당}$$

$$\therefore f(0) = 0$$

25. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, $g(x) = -2$ 인 상수함수일 때, $f(4) + g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(x) = x$ 에서 $f(4) = 4$

$g(x) = -2$ 에서 $g(-1) = -2$

$\therefore f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

26. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 64$

해설

정의역과 공역의 개수가 다르므로
일대일 대응은 없고, 정의역의 개수가 A
공역의 개수가 B 일 때 함수 개수는 B^A 이다.

$$\therefore 4^3 = 64$$

$$\therefore a + b = 64$$

27. 두 함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ 에 대하여 $(f \circ g)(x)$ 를 구하면?

① $(f \circ g)(x) = (x + 2)^2$

② $(f \circ g)(x) = x^2 + 2$

③ $(f \circ g)(x) = (x - 2)^2$

④ $(f \circ g)(x) = x^2 - 2$

⑤ $(f \circ g)(x) = -x^2 + 2$

해설

두 함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ 에 대하여

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2$$

28. 두 함수 $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $(g \circ f)(2)$ 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$\therefore (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 2$$

29. 두 함수 $f(x) = x + 2$, $g(x) = 2x - 1$ 에 대하여 $(g \circ f)(1)$ 의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(3) = 5$$

30. 함수 $f(x) = mx + n$ 에 대하여 $f^{-1}(3) = 2$, $(f \circ f)(2) = 7$ 이 성립할 때, 상수 m, n 의 합 $m + n$ 의 값은 얼마인가?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$f^{-1}(3) = 2$ 이므로

역함수의 정의에 의해서

$f(2) = 3, (f \circ f)(2) = 7$ 에서 $f(f(2)) = f(3) = 7$

$$2m + n = 3 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$3m + n = 7 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m = 4, n = -5$

$$\therefore m + n = -1$$

31. $f(x) = 2x - 3$ 이고 $g(x)$ 가 $(g \circ f)^{-1}(x) = 2x$ 를 만족시킬 때, $g(1)$ 의 값은 얼마인가?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$(g \circ f)^{-1}(x) = 2x \Leftrightarrow (g \circ f)(2x) = x$$

$$\Leftrightarrow g(f(2x)) = x$$

$$f(2x) = 2 \bullet 2x - 3 = 4x - 3$$

$$\therefore g(f(2x)) = g(4x - 3) = x$$

$$4x - 3 = 1 \text{ 에서 } x = 1 \text{ 이므로}$$

$$g(4x - 3) = x \text{ 의 양변에 } x = 1 \text{ 을 대입하면 } g(1) = 1$$

32. 함수 $y = -|x + 1| + 3$ 의 최댓값을 구하면?

① 1

② 2

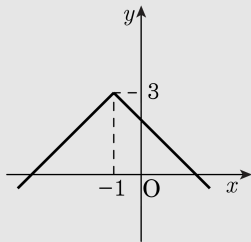
③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$y = -|x + 1| + 3$ 의 그래프는 다음
그림과 같으므로 최댓값은
 $x = -1$ 일 때, 3이다.



33. 함수 $y = |x + 1| - |x - 3|$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |x + 1| - |x - 3|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$$y = -(x + 1) + x - 3 = -4$$

ii) $-1 \leq x < 3$ 일 때

$$y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$$

iii) $x \geq 3$ 일 때

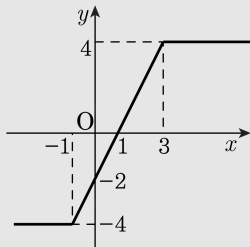
$$y = x + 1 - (x - 3) = 4$$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로

$$M = 4, m = -4$$

$$\therefore M - m = 4 - (-4)$$

$$= 8$$



34. 각 자리의 숫자의 합이 5 보다 작은 두 자리 자연수의 집합을 A 라 할 때, $n(A)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$A = \{10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30, 31, 40\}$$

$$n(A) = 10$$

35. 두 집합 $A = \{2, 8, a\}$, $B = \{4, a+4, b+1\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{-2, 2\}$ 일 때, a, b 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

▷ 정답 : $b = -3$

해설

$A \cap B = \{-2, 2\}$ 이므로

$A = \{2, 8, a\}$ 에서 $a = -2$

$B = \{4, 2, b+1\}$ 에서 $b+1 = -2, b = -3$

$\therefore a = -2, b = -3$

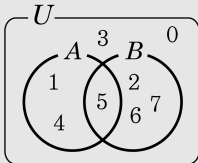
36. 전체집합 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cap B = \{5\}$, $(A \cup B)^c = \{0, 3\}$, $A - B = \{1, 4\}$ 일 때, $n(B - A)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



따라서 $B - A = \{2, 6, 7\}$ 이므로 $n(B - A) = 3$

37. 50명의 수험생 중에서 <문제1>, <문제2>를 맞힌 수험생은 각각 33명, 31명이고, <문제1>과 <문제2>를 모두 맞힌 수험생은 18명이었다. 이 때, <문제1>과 <문제2>를 모두 틀린 수험생의 수를 구하여라.

▶ 답: 명

▷ 정답: 4 명

해설

A = (문제1을맞춘학생),

B = (문제2을맞춘학생) 라 하면,

$$n(A) = 33, n(B) = 31, n(A \cap B) = 18, n(A \cup B) = 46$$

<문제1>과 <문제2>를 모두 틀린 학생 수 = $n(A^c \cap B^c)$ 이므로

$$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c)$$

$$= n(U) - n(A \cup B)$$

$$= 50 - 46$$

$$= 4$$

38. 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

(가) 두 집합 X, Y 에 대하여 집합 X 의 각 원소에 집합 Y 의 원소가 오직 하나씩만 대응할 때, 이 대응을 X 에서 Y 로의 함수라고 한다.

(나) 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 함수 f, g 가 $f(x) = x$, $g(x) = |x|$ 일 때, 두 함수 f 와 g 는 서로 같은 함수이다.

(다) 일차함수 $y = 2x + 5$ 는 일대일 대응이다.

① (가)

② (가), (나)

③ (나), (다)

④ (가), (다)

⑤ (가), (나), (다)

해설

(가), (다) : 참

(나) : $f(x)$ 의 치역은 $\{1, 0, -1\}$

$g(x)$ 의 치역은 $\{0, 1\}$ 이므로 $f \neq g$

39. 다음 보기의 함수 중에서 일대일 대응인 것은 모두 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = -x^2 + 1$

㉡ $g(x) = -x + 1$

㉢ $h(x) = x^3$

㉤ $i(x) = 2$

㉥ $j(x) = |2x - 1| \quad (x \geq 1)$

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

일대일 대응이란 정의역이 x 에 치역 y 가
하나씩 대응 될 때를 말한다.

㉠, ㉤ 일대일 대응이 아니다.

㉡ 함수가 아니다.

따라서 일대일 대응인 것은 ㉡, ㉢, ㉥ 3개이다.

40. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중에서 일대일 대응의 개수를 m , 상수함수의 개수를 n 이라 할 때, $m - n$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 5

해설

일대일 대응의 개수는 a, b, c 를 나열하는

방법의 수와 같으므로 $m = 6$

상수함수의 개수는 치역이 a, b, c 인 경우의 3가지

$$\therefore m = 3$$

$$\text{따라서 } m - n = 6 - 3 = 3$$

41. 자연수 n 을 10 으로 나눈 나머지를 $f(n)$ 으로 나타내고, $a_n = f(n^2) - f(n)$ 이라고 할 때, a_{2004} 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

(자연수 n 을 10 으로 나눈 나머지)

$= (n \text{ 의 일의 자리수})$

$$a_{2004} = f(2004^2) - f(2004) = 6 - 4 = 2$$

42. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 와 $B = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 A 에서 B 로의 함수의 개수를 a , 일대일 함수의 개수를 b , 상수함수의 개수를 c 라 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 64

② 32

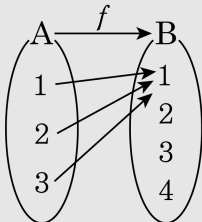
③ 128

④ 92

⑤ 48

해설

- (1) 함수의 개수 : 1, 2, 3, 4 를 중복 가능하게 3 번 선택하여 늘어놓는 경우와 같으므로
 $\therefore a = 4 \times 4 \times 4 = 64$
- (2) 일대일 함수의 개수 : 1, 2, 3, 4 를 중복 없이 3 번 선택하여 늘어놓는 경우이므로
 $\therefore b = 4 \times 3 \times 2 = 24$
- (3) 상수함수의 개수 : 그림과 같이 1, 2, 3, 4 중 한 원소에만 대응되는 경우이므로
 $\therefore c = 4$



$$\therefore a + b + c = 92$$

43. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a, b, c, d, e\}$ 로의 일대일 대응 f 중 $f(1) = a, f(2) = b$ 인 f 의 개수는?

① 4 개

② 6 개

③ 8 개

④ 12 개

⑤ 16 개

해설

$f(1) = a, f(2) = b$ 이므로 $f: A \rightarrow B$ 가 일대일 대응이려면

$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(1), f(2)$ 의 값을 제외한 3 개,

$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 제외한 2 개,

$f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값을 제외한 1 개이다.

따라서, 일대일 대응 f 의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 개

44. 다음은 명제 ' $3m^2 - n^2 = 1$ 을 만족하는 (가)'에 대한 증명에서 중간 부분을 적은 것이다.

... (생략) ...

m, n 이 정수이고 $3m^2 = n^2 + 1$ 이므로, $n^2 + 1$ 은 3의 배수이다.

한편, 정수 n 이 어떤 정수 k 에 대하여

$$n = 3k \text{ 이면 } n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$$

$$n = 3k + 1 \text{ 이면 } n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$$

$$n = 3k + 2 \text{ 이면 } n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \text{ 이므로 } n^2 \text{ 을 } 3 \text{ 으로 나눈 나머지는 } 0 \text{ 또는 } 1 \text{ 이다.}$$

따라서 $n^2 + 1$ 을 3으로 나눈 나머지는 1 또는 2이다.

... (생략) ...

다음 중 위의 (가)에 가장 알맞은 것은?

- ① m, n 중 적어도 하나는 정수이다.
- ② m, n 중 어느 것도 정수가 아니다.
- ③ m, n 이 모두 정수인 해가 적어도 하나 있다.
- ④ m, n 이 모두 정수인 해가 오직 하나 있다.
- ⑤ m, n 이 모두 정수인 해는 없다.

해설

귀류법을 쓰면 m, n 이 정수이고 $3m^2 = n^2 + 1$ 이므로, $n^2 + 1$ 은 3의 배수이다. ... ㉠

한편, 정수 n 이 어떤 정수 k 에 대하여,

$$n = 3k \text{ 이면 } n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$$

$$n = 3k + 1 \text{ 이면 } n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$$

$$n = 3k + 2 \text{ 이면 } n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \text{ 이므로, } n^2 \text{ 을 } 3 \text{ 으로 나눈 나머지는 } 0 \text{ 또는 } 1 \text{ 이다.}$$

따라서, $n^2 + 1$ 을 3으로 나눈 나머지는 1 또는 2이다. ... ㉡

그러므로 ㉠, ㉡에 의하여 모순이다.

따라서, $3m^2 - n^2 = 1$ 을 만족하는 m, n 이 모두 정수인 해는 없다.

45. 세 양수 a, b, c 가 $abc = 1$ 을 만족할 때, 이 사실로부터 추론할 수 있는 것을 보기에서 모두 고르면?

I. $a + b + c \geq 3$

II. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$

III. $ab + bc + ca \geq 3$

IV. $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8$

① I, II

② I, III

③ III, IV

④ I, III, IV

⑤ I, II, III, IV

해설

$abc = 1$ 이므로

I. $a + b + c \geq 3 \times \sqrt[3]{abc} = 3$

II. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 \sqrt[3]{a^2 \times b^2 \times c^2} = 3$

III. $ab + bc + ca \geq 3 \sqrt[3]{ab \times bc \times ca} = 3$

IV. $(a+1)(b+1)(c+1)$

$= abc + (ab + bc + ca) + (a + b + c) + 1$

$\geq 1 + 3 + 3 + 1 = 8$

46. $a > 1$ 일 때, $\frac{1}{a-1} + 4a - 3$ 의 최솟값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\frac{1}{a-1} > 0$$

$$4(a-1) + 1 + \frac{1}{a-1} \geq 2 \cdot \sqrt{4(a-1) \cdot \frac{1}{(a-1)}} + 1$$

$$= 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

47. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(1) = 3$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)} \text{ 를 만족시킨다. 이 때, } f(1998) \text{ 의 값은?}$$

① 3

② 2

③ -1

④ -2

⑤ -3

해설

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{1+f(1)}{1-f(1)} \\ &= \frac{1+3}{1-3} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{1+f(2)}{1-f(2)} \\ &= \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4) &= \frac{1+f(3)}{1-f(3)} \\ &= \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(5) &= \frac{1+f(4)}{1-f(4)} \\ &= \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

$f(5) = f(1) = 3$ 이므로

$$f(6) = f(2) = -2, f(7) = f(3) = -\frac{1}{3}$$

$$f(8) = f(4) = \frac{1}{2}, f(9) = f(5) = f(1) = 3, \dots$$

이와 같이 $f(n)$ (n 은 자연수) 은

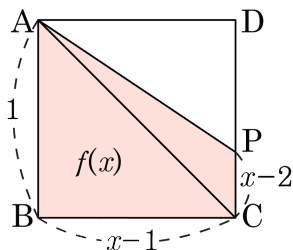
$3, -2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ 이 반복됨을 알 수 있다.

$$\therefore f(4n+k) = f(k)$$

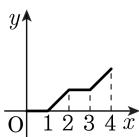
(단, n 은 0 이상의 정수, $k = 0, 1, 2, 3$)

$$\text{그러므로 } f(1998) = f(4 \times 499 + 2) = f(2) = -2$$

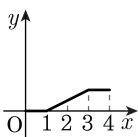
48. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P 가 있다. 점 P 는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B 를 돌아 다시 점 A 로 돌아온다. 점 P 가 움직인 거리를 x , 선분 AP 가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$ 라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



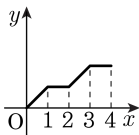
①



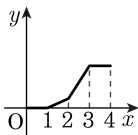
②



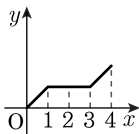
③



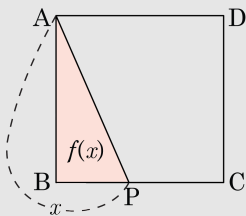
④



⑤



해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \leq x \leq 2) \\ \frac{1}{2} & (2 \leq x \leq 3) \\ 1 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

한편, 각 구간의 경계점에서

함수는 연속이므로 ②가 옳다.

49. 일차 이하의 다항함수 $y = f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족한다.

I. $f(0) \leq f(1)$

II. $f(2) \geq f(3)$

III. $f(1) = 1$

이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

< 보기 >

㉠ $f(2) = 1$

㉡ $f(3) = 3f(1)$

㉢ $f(-1) > f(1)$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

일차 이하의 다항함수 중

조건 I, II를 만족하는 함수는

상수함수이므로 조건 III에 의하여 $f(x) = 1$ 이다.

따라서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

50. 함수 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ 에 대하여 $f^9\left(\frac{1}{2}\right) + f^{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하면?
(단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$ 이다.)

- ① $\frac{80}{399}$ ② $\frac{82}{399}$ ③ $\frac{83}{399}$ ④ $\frac{85}{399}$ ⑤ $\frac{86}{399}$

해설

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1} \\ &= \frac{x}{2x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f(f^2(x)) = f\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1} + 1} \\ &= \frac{x}{3x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^4(x) &= f(f^3(x)) = f\left(\frac{x}{3x+1}\right) = \frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{x}{3x+1} + 1} \\ &= \frac{x}{4x+1} \end{aligned}$$

이제 $f^{n-1}(x) = \frac{x}{(n-1)x+1}$ 라고 놓으면

$$\begin{aligned} f^n(x) &= f(f^{n-1}(x)) = f\left(\frac{x}{(n-1)x+1}\right) \\ &= \frac{\frac{x}{(n-1)x+1}}{\frac{x}{(n-1)x+1} + 1} = \frac{x}{(n-1)x+1+x} \\ &= \frac{x}{nx+1} \end{aligned}$$

$$\therefore f^9(2) + f^{10}(2) = \frac{2}{9 \cdot 2 + 1} + \frac{2}{10 \cdot 2 + 1} = \frac{80}{399}$$