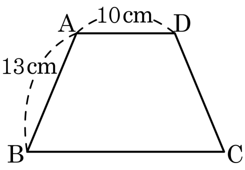
1. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 13\,\mathrm{cm}$, $\overline{AD} = 10\,\mathrm{cm}$, $\overline{BC} = 2\overline{AD}$ 인 등변사다리꼴의 넓이를 구하면?

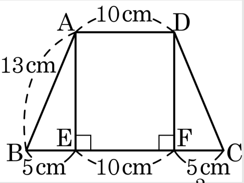


① $120\,\mathrm{cm}^2$ ② $130\,\mathrm{cm}^2$

③ $180\,\mathrm{cm}^2$ ④ $195\,\mathrm{cm}^2$

⑤ $200\,\mathrm{cm}^2$

해설



등변사다리꼴 ABCD 의 꼭짓점 A , D 에서 $\overline{BC}$ 에 수선을 내린 수선의 발을 각각 E , F 라 하면 직사각형 AEFD 에서 $\overline{EF} = 10\,\mathrm{cm}$ 이므로 $\overline{BE} = 5\,\mathrm{cm}$, $\overline{CF} = 5\,\mathrm{cm}$ 이다.

또, 직각삼각형 ABE 에서 피타고라스 정리에 의해 $\overline{AB}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{AE}^2$, $13^2 = 5^2 + \overline{AE}^2$,

따라서 $\overline{AE}^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$ 이다.

그런데 $\overline{AE} > 0$ 이므로 $\overline{AE} = 12\,\mathrm{cm}$ 이다.

이제 등변사다리꼴의 넓이를 구하면

$\frac{1}{2} \times (\overline{AD} + \overline{BC}) \times \overline{AE} = \frac{1}{2} \times (10 + 20) \times 12 = 180(\,\mathrm{cm}^2)$ 이다.

2. 다음 중 직각삼각형인 것을 모두 고르면?

㉠ $2,\ 4,\ \sqrt{10}$	㉡ $3,\ \sqrt{15},\ \sqrt{23}$
㉢ $5,\ 12,\ 13$	㉣ $\sqrt{91},\ 5\sqrt{3},\ 4$
㉤ $2\sqrt{3},\ 3\sqrt{5},\ 2\sqrt{7}$	

① ㉠, ㉡ ② ㉢, ㉣ ③ ㉢, ㉤ ④ ㉡, ㉤ ⑤ ㉣, ㉤

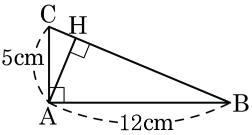
해설

㉠ $4^2 > (\sqrt{10})^2 + 2^2$

㉡ $(\sqrt{23})^2 < 3^2 + (\sqrt{15})^2$

㉤ $(3\sqrt{5})^2 > (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{7})^2$

3. 다음 그림과 같이 $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형 ABC 의 점 A 에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발이 H 라 할 때, $\overline{BH}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ____ cm

▷ 정답 : $\frac{144}{13}$ cm

해설

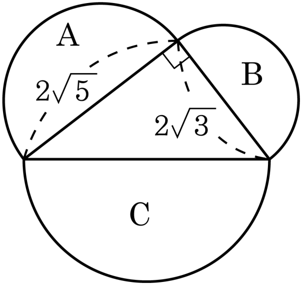
$\triangle ABC$ 는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 적용하면 $\overline{BC} =$ 13 cm

$\overline{BH} = x$ 라 하자.

닮은 삼각형의 성질을 이용하면

$12^2 = 13x$ 이므로 $x = \frac{144}{13}$ (cm) 이다.

4. 그림과 같이 직각삼각형의 각 변을 지름으로 하는 반원의 넓이를 각각 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ 라고 할 때, $2(\mathrm{A}+\mathrm{B})+\mathrm{C}$ 의 값을 구하면?



① 8π　② 10π　③ 12π　④ 14π　⑤ 16π

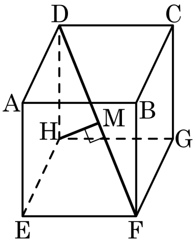
해설

피타고라스 정리에 의해서 C 의 지름을 c 라고 하면 $c^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 32$

따라서 $c = 4\sqrt{2}$ 이므로 $\mathrm{C} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{c}{2}\right)^2 \pi = \frac{1}{8} \times 32\pi = 4\pi$

피타고라스 정리를 이용하면 $\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$ 이므로 $2(\mathrm{A}+\mathrm{B}) + \mathrm{C} = 3\mathrm{C} = 12\pi$

5. 다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 정육면체가 있다. 꼭짓점 H 에서 대각선 $\overline{\mathrm{DF}}$ 에 내린 수선의 발을 M 이라 할 때 $\overline{\mathrm{HM}}$ 의 길이는?



▶ **답 :**

▷ **정답 :** $\sqrt{2}$

해설

$\overline{\mathrm{DF}} = \sqrt{3}a = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$

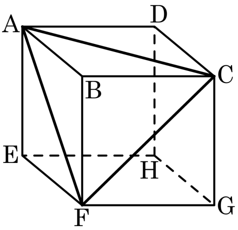
$\overline{\mathrm{HF}} = a\sqrt{2} = \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$

$\overline{\mathrm{DH}} \times \overline{\mathrm{HF}} = \overline{\mathrm{DF}} \times \overline{\mathrm{HM}}$

$\sqrt{3} \times \sqrt{6} = 3 \times \overline{\mathrm{HM}}$

$\therefore \overline{\mathrm{HM}} = \sqrt{2}$

6. 다음 그림과 같은 정육면체의 대각선의 길이가 $6\sqrt{3}$ 일 때, $\triangle$ AFC 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $18\sqrt{3}$

해설

한 모서리의 길이가 a 인 정육면체의 대각선의 길이는 $\sqrt{3}a = 6\sqrt{3}$ $\therefore$ $a = 6$

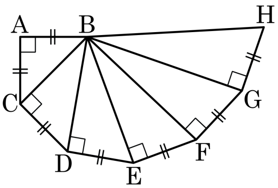
정육면체의 한 모서리의 길이가 6 이므로

$\overline{AC} = \overline{AF} = \overline{CF} = 6\sqrt{2}$

$\triangle$AFC 는 한 변의 길이가 $6\sqrt{2}$ 인 정삼각형이므로 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4} \times (6\sqrt{2})^2 = 18\sqrt{3}$

7. 다음 그림에서 $\triangle$BGH 의 넓이가 $3\sqrt{6}\text{cm}^2$ 일 때, $\triangle$ABC 의 둘레의 길이는?



① $2(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ cm

② $\sqrt{2}(2+\sqrt{2})$ cm

③ $2\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$ cm

④ $2(\sqrt{3}+1)$ cm

⑤ $\sqrt{3}(1+\sqrt{3})$ cm

해설

$\overline{GH}=a$라고 하면

$\overline{BG}=\sqrt{a^2+a^2+a^2+a^2+a^2+a^2}=a\sqrt{6}$일 때,

$\triangle$BGH의 넓이를 구하면

$\frac{1}{2}\times a\sqrt{6}\times a=3\sqrt{6}, a^2=6, a=\sqrt{6}$이다.

$\overline{BC}=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{6})^2}=2\sqrt{3}(\text{cm})$이다.

따라서 $\triangle$ABC의 둘레는 $\sqrt{6}+\sqrt{6}+2\sqrt{3}=2\sqrt{6}+2\sqrt{3}(\text{cm})$ 이다.

8. 높이가 $6\,\mathrm{cm}$ 인 정삼각형의 넓이를 구하면?

① $6\,\mathrm{cm}^2$　② $9\,\mathrm{cm}^2$　③ $9\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$

④ $10\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$　⑤ $12\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$

해설

정삼각형의 한 변의 길이를 $a\,\mathrm{cm}$ 라 하면,

높이 $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ 이므로 $\frac{\sqrt{3}}{2}a = 6$

$\therefore\ a = 4\sqrt{3}$

따라서, 넓이

$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(4\sqrt{3})^2 = 12\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2)$ 이다.

9. 이차함수 $y=-\frac{1}{4}x^2+2x-1$ 의 그래프의 꼭짓점과 y 축과의 교점, 그리고 원점을 이어 삼각형을 만들었다. 이 삼각형의 둘레의 길이가 $a+b\sqrt{c}$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?(단, a, b, c는 유리수, c는 최소의 자연수)

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

$y=-\frac{1}{4}x^2+2x-1$

$y=-\frac{1}{4}(x-4)^2+3$ 이므로

꼭짓점의 좌표는 $(4,\ 3)$ 이다.

y 축과의 교점은 x 좌표가 0 일 때이므로 $(0,\ -1)$

따라서

꼭짓점 - 원점의 거리

$=\ \sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}=5$

y 축과의 교점-원점의 거리 $=1$

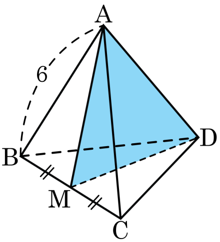
꼭짓점-y 축과의 교점의 거리

$=\ \sqrt{(4-0)^2+\{3-(-1)\}^2}=4\sqrt{2}$

$\therefore$ 삼각형의 둘레$=6+4\sqrt{2}$ 이므로

$a+b+c$ 의 값은 12 이다.

10. 다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 6 인 정사면체 A – BCD 에서 점 M 이 $\overline{BC}$ 의 중점일 때, $\triangle$AMD 의 넓이는?



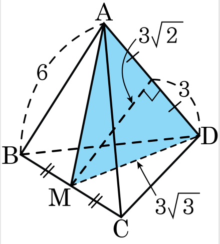
① 9 ② 10 ③ $9\sqrt{6}$ ④ $9\sqrt{3}$ ⑤ $9\sqrt{2}$

해설

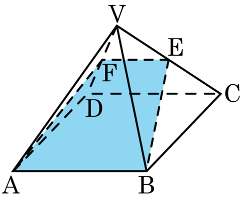
$\triangle$AMD 는 $\overline{AM} = \overline{DM} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ 인 이등변삼각형이고

$\triangle$AMD 의 높이는 $\sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ 이다.

$\therefore \triangle AMD = \dfrac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$



11. 다음 그림과 같이 모서리의 길이가 모두 $8\,\mathrm{cm}$ 인 정사각뿔에서 $\overline{VC}$, $\overline{VD}$ 의 중점을 각각 E, F 라고 할 때, □ABEF 의 넓이를 구하면?



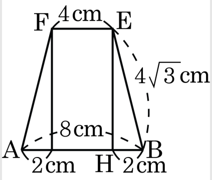
① $11\sqrt{10}\,\mathrm{cm}^2$　　② $12\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$

③ $12\sqrt{6}\,\mathrm{cm}^2$　　④ $12\sqrt{11}\,\mathrm{cm}^2$

⑤ $24\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$

해설

$\overline{AF} = \overline{BE}$, $\overline{EF} /\!/ \overline{AB}$ 이므로 □ABEF 는 등변사다리꼴이다.



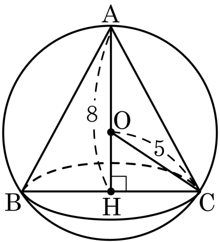
$\overline{AB} = 8\,\mathrm{cm}$, $\overline{EF} = \dfrac{1}{2}\overline{AB} = 4\,\mathrm{cm}$ (∵ 중점 연결 정리)

$\overline{BE}$, $\overline{AF}$ 는 한 변의 길이가 $8\,\mathrm{cm}$ 인 정삼각형의 높이이므로 $\overline{BE} = \overline{AF} = 4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$

사다리꼴의 높이 $\overline{EH} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{11}(\mathrm{cm})$ 이다.

$\therefore$ □ABEF $= (8+4) \times 2\sqrt{11} \times \dfrac{1}{2} = 12\sqrt{11}(\mathrm{cm}^2)$

12. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5 인 구에 내접해 있는 원뿔의 부피를 구하면?



① $\dfrac{74}{3}\pi$ ② $\dfrac{86}{3}\pi$ ③ $\dfrac{92}{3}\pi$

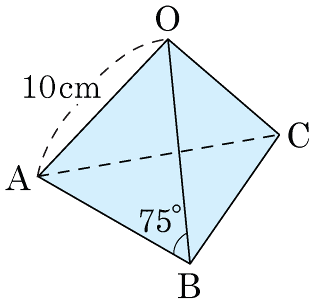
④ $\dfrac{112}{3}\pi$ ⑤ $\dfrac{128}{3}\pi$

해설

구의 반지름이 5 이므로 $\overline{OH}=3$ 이고 $\overline{CH}=4$ 이다.

따라서 원뿔의 부피는 $\pi\times 4^2\times 8\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{128}{3}\pi$ 이다.

13. 그림과 같이 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 10\text{cm}$, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$, $\angle OBA = 75°$인 삼각뿔이 있다. 이 삼각뿔의 꼭짓점 A에서 출발하여 겉면을 따라 $\overline{OB} = \overline{OC}$를 지나 다시 꼭짓점 A에 이르는 최단 거리는?



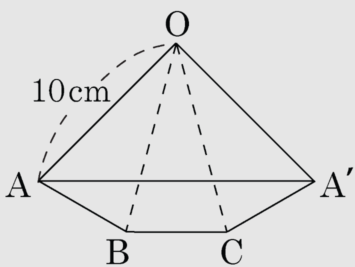
① 10cm ② $10\sqrt{2}$cm ③ $10\sqrt{3}$cm

④ 15cm ⑤ 20cm

해설

삼각형 OAB는 이등변삼각형이고 $\angle OBA = 75°$이므로

$\angle AOB = 180 - (75 + 75) = 30°$



전개도에서 $\angle AOA' = 30 + 30 + 30 = 90°$

따라서 삼각형 OAA′는 직각이등변삼각형이다.

최단거리는 $\sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$cm 이다.

14. $m > n$ 이고, $a = m^2 + n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 - n^2$ 일 때, a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 직각삼각형

해설

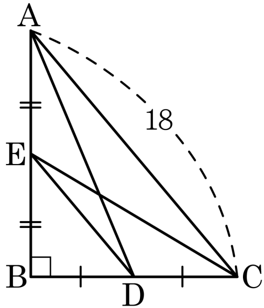
$a^2 = \left(m^2 + n^2\right)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4$

$b^2 + c^2 = (2mn)^2 + \left(m^2 - n^2\right)^2$

$\quad = m^4 + 2m^2n^2 + n^4$

$a^2 = b^2 + c^2$ 이므로 직각삼각형이다.

15. 다음 그림에서 $\angle B = 90°$ 이고, D, E 는 각각 $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ 의 중점이다. $\overline{AC} = 18$ 일 때, $\overline{AD}^2 + \overline{CE}^2$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 405

해설

$\overline{BE} = x,\ \overline{BD} = y$ 라고 두자.

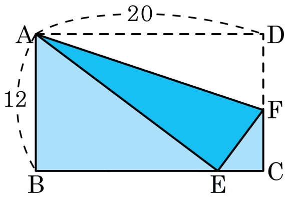
$\triangle ABC$ 에서

$18^2 = (2x)^2 + (2y)^2,\ x^2 + y^2 = 81$ 이 된다.

$\overline{AD}^2 = (2x)^2 + y^2,\ \overline{CE}^2 = x^2 + (2y)^2$

$$\begin{aligned}\overline{AD}^2 + \overline{CE}^2 &= 5x^2 + 5y^2 = 5(x^2 + y^2)\\ &= 5 \cdot 81 = 405\end{aligned}$$

16. 다음 그림과 같이 $\overline{AB}=12$, $\overline{AD}=20$ 인 직사각형 모양의 종이를 점 D 가 $\overline{BC}$ 위에 오도록 접었을 때, $\overline{EF}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{20}{3}$

해설

$\triangle ADF \equiv \triangle AEF$ 이므로

$\overline{EF}=\overline{DF}=x(\mathrm{cm})$ 라 하면

$\overline{AE}=\overline{AD}=20$, $\overline{AB}=12$ 이므로

$\triangle ABE$ 에서 $\overline{BE}=\sqrt{20^2-12^2}=16$,

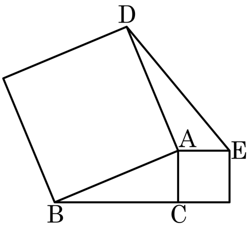
$\therefore \overline{CE}=\overline{BC}-\overline{BE}=20-16=4$

$\overline{CF}=\overline{CD}-\overline{DF}=12-x$

$\triangle ECF$ 에서 $x^2=4^2+(12-x)^2$, $24x=160$,

$\therefore x=\dfrac{20}{3}$

17. 다음 그림과 같이 변의 길이가 각각 5, 12, 13 인 직각삼각형 ABC 의 두 변 AB, AC를 각각 한 변으로 하는 2개의 정사각형을 그렸을 때, $\overline{DE}^2$ 을 구하여라.

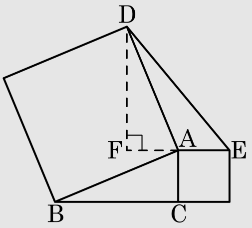


▶ 답 :

▷ 정답 : 244

해설

점 D에서 $\overline{AE}$의 연장선 위에 내린 수선의 발을 F라 하면



$\triangle ABC$와 $\triangle ADF$에서

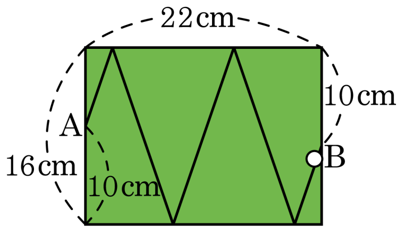
$\angle ACB = \angle DFA = 90°$, $\overline{AD} = \overline{AB} = 13$, $\angle DAF = 90° - \angle FAB = \angle BAC$

$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle ADF$(RHA 합동)

$\therefore \overline{AF} = 5$, $\overline{DF} = 12$

따라서 $\triangle DEF$에서 피타고라스 정리에 의해서 $\overline{DE}^2 = (5+5)^2 + 12^2 = 244$이다.

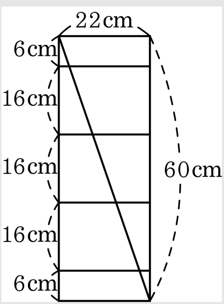
18. 다음 그림과 같은 직사각형 모양의 미니당구대에서 공을 너무 세게 치는 바람에 흰 공이 A 에서 출발하여 벽을 차례로 거쳐 점 B 에 도착하였다. 공이 지나갈 수 있는 최단 거리를 구하면?



① $\sqrt{4080}$cm ② $\sqrt{4081}$cm ③ $\sqrt{4082}$cm

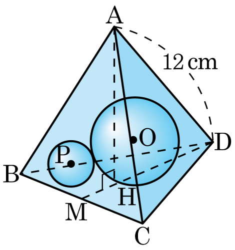
④ $\sqrt{4083}$cm ⑤ $\sqrt{4084}$cm

해설



(공이 지나간 최단 거리) $= \sqrt{22^2 + 60^2} = \sqrt{4084}$(cm)

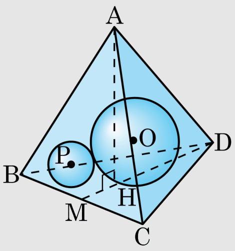
19. 다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 12 cm 인 정사면체 안에 정사면체의 4 개의 면에 접하는 구를 O 라고 하고 사면체의 3 개의 면에 접하고 구 O 와 외접하는 구를 P 라고 할 때, 구 P 의 부피를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm^3

▷ 정답 : $\sqrt{6}\pi\,\text{cm}^3$

해설



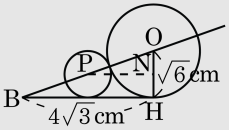
구 O 의 반지름을 r, 구 P 의 반지름을 r' 이라고 하면 점 H 는 $\triangle$BCD 의 무게 중심이므로

$$\overline{\text{DH}} = \frac{2}{3}\overline{\text{DM}} = \frac{2}{3} \times 6\sqrt{3}$$
$$= 4\sqrt{3}\ (\text{cm})$$

따라서, $\overline{\text{AH}} = \sqrt{12^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2} = 4\sqrt{6}\ (\text{cm})$

(정사면체 A – BCD 의 부피)

$$= \frac{1}{3} \times 12 \times 6\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times 4\sqrt{6}$$
$$= 4 \times \frac{1}{3} \times 12 \times 6\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times r$$
$$\therefore\ r = \sqrt{6}\ (\text{cm})$$



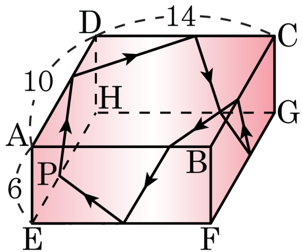
$$\overline{\text{OB}} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2} = 3\sqrt{6}\ (\text{cm})$$

$\triangle$OPN $\backsim$ $\triangle$OBH 이므로

$$\overline{\text{OP}} : \overline{\text{OB}} = \overline{\text{ON}} : \overline{\text{OH}}$$
$$\left(r' + \sqrt{6}\right) : 3\sqrt{6} = \left(\sqrt{6} - r'\right) : \sqrt{6}$$
$$\sqrt{6}r' + 6 = 18 - 3\sqrt{6}r'$$
$$4\sqrt{6}r' = 12$$
$$\therefore\ r' = \frac{\sqrt{6}}{2}\ (\text{cm})$$

$$\therefore\ (\text{구 P의 부피}) = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \sqrt{6}\pi\ (\text{cm}^3)$$

20. 세 모서리의 길이가 각각 6, 10, 14 인 직육면체의 모서리 EH 위의 한 점 P 에서 직육면체의 겉면을 따라 6 개의 면을 모두 지나서 다시 P 로 돌아오는 최단 경로의 길이를 구하여라.

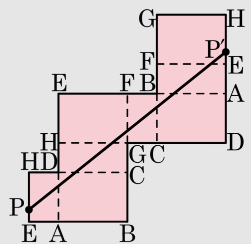


▶ 답 :

▷ 정답 : $8\sqrt{41}$

해설

$\overline{AE}=6$, $\overline{AD}=10$, $\overline{AB}=14$ 인 직육면체의 전개도를 그리면 위의 그림과 같다.



따라서 최단 거리는 $\sqrt{40^2+32^2}=\sqrt{2624}=8\sqrt{41}$ 이다.