1. 전체집합 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 조건 $x^2 - 2 > 0$의 진리집합은?

① $\varnothing$　② $\{0,\ 1\}$　③ $\{3,\ 4,\ 5\}$

④ $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$　⑤ U

해설

주어진 조건 $x^2 - 2 > 0$ 에 $x = 0$을 대입하면 $0 - 2 > 0$ (거짓)
$x = 1$을 대입하면 $1 - 2 > 0$ (거짓)
$x = 2$를 대입하면 $4 - 2 > 0$ (참)
$x = 3$을 대입하면 $9 - 2 > 0$ (참)
$x = 4$를 대입하면 $16 - 2 > 0$ (참)
$x = 5$를 대입하면 $25 - 2 > 0$ (참)
따라서 구하는 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

2. $x > y > 0$인 실수 x, y에 대하여 $\dfrac{x}{1+x}$, $\dfrac{y}{1+y}$의 대소를 비교하면?

① $\dfrac{x}{1+x} < \dfrac{y}{1+y}$ ② $\dfrac{x}{1+x} \leq \dfrac{y}{1+y}$ ③ $\dfrac{x}{1+x} > \dfrac{y}{1+y}$
④ $\dfrac{x}{1+x} \geq \dfrac{y}{1+y}$ ⑤ $\dfrac{x}{1+x} = \dfrac{y}{1+y}$

해설

$A = \dfrac{x}{1+x} - \dfrac{y}{1+y}$ 이라하면

$A = \dfrac{x}{1+x} - \dfrac{y}{1+y} = \dfrac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)}$

$= \dfrac{x-y}{(1+x)(1+y)} > 0$

따라서 $\therefore \dfrac{x}{1+x} > \dfrac{y}{1+y}$

3. 두 양수 a, b에 대하여 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것은?

① a, b의 산술 평균은 $\dfrac{a+b}{2}$이다.

② $\sqrt{ab}$는 a, b의 기하평균이다.

③ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$은 절대부등식이다.

④ $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$이면 반드시 $b = \dfrac{1}{a}$이다.

⑤ $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$는 항상 성립한다.

해설

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \cdots$ 절대부등식

$\dfrac{a+b}{2}$: 산술평균, $\sqrt{ab}$: 기하평균

④: 절대부등식의 등호는 $a = b$일 때 성립한다.

4. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 15 의 약수$\}, B = \{x \mid x$는 5 의 약수$\}$ 에 대하여 집합 A 의 부분집합 중 집합 B의 원소를 포함하지 않는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4개

해설

집합 A 와 B 를 각각 원소나열법으로 나타내면 $A = \{1, 3, 5, 15\}, B = \{1, 5\}$ 이다. 따라서 집합 A 의 부분집합 중 집합 B 의 원소를 포함하지 않는 부분집합은 $\varnothing$, $\{3\}$,$\{15\}$, $\{3, 15\}$ 이고 개수는 4 개이다.

5. 집합 $A = \{x \mid x$는 10 초과 20 미만인 짝수$\}$ 일 때, 집합 A 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 16 개

해설

$A = \{12,\ 14,\ 16,\ 18\}$

집합 A 의 부분집합의 개수 : $2^4 = 16$

6. $\{2,\ 3,\ 4\} \subset A \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 를 만족하는 집합 A 의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

집합 A 는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 의 부분집합 중 원소 2, 3, 4 를 반드시 포함하는 집합이므로
그 개수는 $2^2 = 4$ (개)

7. $\{a\} \subset X \subset \{a, b, c, d\}$ 이고 원소의 개수가 3 개인 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 3 개

해설

$\{a\} \subset X \subset \{a, b, c, d\}$ 이므로
a를 포함하는 $\{a, b, c, d\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 3 개인 집합을 구하면 된다.
a를 제외한 $\{b, c, d\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 2개인 집합을 구하면 $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$ 의 3개이므로, a 를 포함하는 $\{a, b, c, d\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 3개인 집합은 $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$의 3개이다.

8. $\{2,\ 3\} \subset X \subset \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 이고 원소의 개수가 4 개인 집합 X 의 원소들의 합은?

① 17　② 18　③ 19　④ 20　⑤ 21

해설

$\{2,\ 3\} \subset X \subset \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 이므로
원소로 2, 3 을 포함하는 $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 4 개인 집합을 구하면 된다.
원소 2, 3 을 제외한 $\{5,\ 7\}$ 의 부분집합은 $\varnothing$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{5,\ 7\}$ 의 4 개가 있으므로, 원소 2, 3 을 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합에는 $\{2,\ 3\}$, $\{2,\ 3,\ 5\}$, $\{2,\ 3,\ 7\}$, $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 이 있다. 이 중 원소의 개수가 4 개인 것은 $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 이므로 원소의 합은 $2+3+5+7=17$ 이다.

9. 두 집합 $A=\{11,\ 13\}$, $B=\{9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 8 개

해설

집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중 원소 11, 13 을 모두 포함하는 집합이므로 구하는 집합 X 의 개수는 $2^{5-2}=2^3=8$ (개)

10. 집합 $A = \{x | x$는 10 이하의 소수$\}$에 대하여 $\{2,\ 5\} \subset X \subset A$를 만족하는 집합 X로 옳지 <u>않은</u>을 모두 고르면?(정답 2개)

① $\{2,\ 3,\ 4\}$　② $\{2,\ 3,\ 5\}$　③ $\{2,\ 5,\ 7\}$
④ $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$　⑤ $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

해설

$A = \{2, 3, 5, 7\}$이고, $\{2,\ 5\} \subset X \subset A$이므로 집합 X는 $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$의 부분집합 중 원소 2, 5를 반드시 포함하는 집합이다.

① $5 \notin \{2,\ 3,\ 4\}$
④ $4 \notin A$
따라서 집합 X로 옳지 않은 것은 ①, ④이다.

11. 집합 $A=\{1,3,5,7,9\}$에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 X의 개수를 구하여라.

$\{1,9\}\subset X\subset A$

▶ 답: 개

▷ 정답: 8개

해설
X는 원소 1과 9를 포함하는 집합 A의 부분집합이므로 X의 개수는 $2\times2\times2=8$(개)이다.

12. $\{a,\ c\} \subset X \subset \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 5 ② 8 ③ 10 ④ 16 ⑤ 32

해설

집합 X 는 $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 의 부분집합이면서 $a,\ c$ 를 포함하는 집합이므로 $\{b,\ d,\ e\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.
$2^3 = 8$(개)

13. 집합 $A=\{a,\ b,\ c\}$ 의 부분집합 중 원소 a 또는 b 를 포함하는 부분집합의 개수는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

원소 a 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{3-1}=4$ (개)
원소 b 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{3-1}=4$ (개)
원소 a, b 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{3-2}=2$ (개)
원소 a 또는 b 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$4+4-2=6$ (개)

14. 집합 $A = \{x \mid x\text{는 } 9\text{보다 작은 자연수}\}$ 의 부분집합 중 원소가 홀수로만 이루어진 부분집합은 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 15 개

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
짝수를 제외한 $\{1, 3, 5, 7\}$ 의 부분집합을 먼저 구하면
원소가 0 개인 부분집합 : $\varnothing$
원소가 1 개인 부분집합 : $\{1\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}$
원소가 2 개인 부분집합 : $\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}$
원소가 3 개인 부분집합 : $\{1, 3, 5\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}$
원소가 4 개인 부분집합 : $\{1, 3, 5, 7\}$
이고, 이 중 원소가 0 개인 부분집합은 홀수가 한 개도 포함되어 있지 않으므로 원소가 홀수로만 이루어진 부분집합이 아니다.
따라서 홀수로만 이루어진 부분집합의 갯수는 15 개이다.

15. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 $\{1,\ 3\} \cap X = \phi$ 를 만족하는 A 의 진부분집합 X 의 개수는?

① 7 개 ② 15 개 ③ 16 개 ④ 31 개 ⑤ 32 개

해설

집합 X 가 원소 1, 3 을 포함하지 않으므로 A 의 진부분집합 X 의 개수는 $\{2,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 의 부분집합의 개수를 구하면 된다.
$\therefore\ 2^4 = 16$ (2^n : 부분집합의 개수, n : 원소의 개수)
따라서, 진부분집합은 $16 - 1 = 15$(개) 이다.

16. 두 집합 $A = \{2, 4\}, B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B$ 이고 $X \neq A, X \neq B$ 를 동시에 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 8 개 ② 10 개 ③ 12 개 ④ 14 개 ⑤ 16 개

해설

집합 X는 $A \subset X, X \subset B$ 에서 $\{2, 4\}$ 는 무조건 포함하므로, 그것을 제외한 $\{6, 8, 10, 12\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

$\therefore\ 2^4 = 16$

여기서 $X = A, X = B$ 인 경우를 뺀다

$\therefore\ 16 - 2 = 14$(개)

17. 집합 X가 집합 $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$의 부분집합일 때, $\{a,\ b\} \cup X = \{a,\ b,\ c,\ d\}$를 만족하는 집합 X의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

$\{a,\ b\} \cup X = \{a,\ b,\ c,\ d\} \rightarrow X$ 는 $\{a,\ b,\ c,\ d\}$의 부분집합 중 $c,\ d$를 항상 원소로 가지는 집합이다. $\therefore\ 2^{4-2} = 2^2 = 4$

18. 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e\}$의 두 부분집합 A, X에 대하여 $A = \{b, c, d\}$일 때, $A \subset X \subset U$를 만족하는 집합 X의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4개

해설

전체집합 $U = \{a, b, c, d, e\}$의 부분집합 중에서 b, c, d를 원소로 갖는 부분집합의 개수

$\therefore\ 2^{5-3} = 4$(개)

19. $A=\{a, b, c, d, e\}$ 일 때, $X \subset A$, $\{b, c, d\} \cap X=\{c, d\}$를 만족하는 집합 X의 개수는?

① 10개 ② 8개 ③ 6개 ④ 4개 ⑤ 2개

해설

c, d는 반드시 포함하고 b는 포함하지 않는 A의 부분집합과 같다.
$\therefore\ 2^{5-3}=4$(개)

20. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 6, 7\}$ 에 대하여 다음의 두 조건을 모두 만족시키는 집합 X 의 개수를 구하여라.

$A \cup X = A, (A \cap B) \cup X = X$

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$A \cup X = A$ 이므로 $X \subset A \cdots$ ㉠
$(A \cap B) \cup X = X$ 이므로 $(A \cap B) \subset X \cdots$ ㉠
㉠, ㉡으로부터 $(A \cap B) \subset X \subset A$
즉, 집합 X는 $(A \cap B)$ 의 원소를 포함하는 집합 A 의 부분집합이다.
$A \cap B = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로 $\{1, 2, 3\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$
집합 X는 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중 원소 1, 2, 3을 포함하는 집합이므로 그 개수는 $2^{5-3} = 2^2 = 4$(개)

21. 집합 $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ 에서 1 을 포함하지 않는 부분집합의 개수가 4 개라고 할 때, 자연수 n 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$2^{(1\text{을 제외한 원소의 개수})} = 2^{n-1} = 4 = 2^2 \quad \therefore n = 3$

22. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3, \cdots, n\}$ 의 부분집합의 개수가 16 개일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$2^n = 16 \quad \therefore n = 4$

23. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 $4, 6$ 을 반드시 포함하는 부분집합의 개수가 64 개일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로 원소 $4,\ 6$ 을 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 2^{n-2} (개) 이다.

$2^{n-2} = 64,\ 2^{n-2} = 2^6$

$n - 2 = 6$ 이므로 $n = 8$

24. p_n 이 다음과 같을 때, $f(p_n) = 1$ (p_n이 명제이면) $f(p_n) = -1$ (p_n이 명제가 아니면) 로 정의한다. 이 때, $f(p_1)+f(p_2)+f(p_3)$ 의 값을 구하면? (단, $n = 1, 2, 3$)

$p_1 : x^2 - x - 2 = 0$ p_2 : 16의 양의 약수는 모두 짝수이다. p_3 : $\sqrt{3}$ 은 유리수이다.

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$f(p_n) = \begin{cases} 1 & (p_n\text{이 명제이다.}) \\ -1 & (p_n\text{이 명제가 아니다.}) \end{cases}$$

p_1 : $x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow$ 명제가 아니다.($\because$ x 값에 따라 참 일수도 거짓일수도 있다.)

p_2 : 거짓, p_3 : 거짓 $\rightarrow$ 모두 거짓인 명제이다.

$\therefore$ $f(p_1)+f(p_2)+f(p_3) = (-1)+1+1 = 1$

25. 다음 두 조건 p, q 에 대하여 '$\sim p$ 또는 q '의 부정은?

p : $-1 < x \le 3$, q : $0 < x \le 2$

① $-1 < x \le 0$ 또는 $2 < x \le 3$

② $-1 < x < 0$ 또는 $2 \le x \le 3$

③ $-1 < x \le 3$

④ $0 < x \le 2$

⑤ x 는 모든 실수

해설

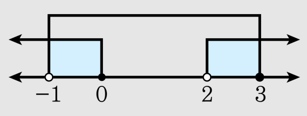
$\sim(\sim p$ 또는 $q) \leftrightarrow p$ 이고 $\sim q$ 그런데

$\sim q$: $x \le 0$ 또는 $x > 2$ 이므로 p 이고 $\sim q$

$\leftrightarrow$ $(-1 < x \le 3)$ 이고 $(x \le 0$ 또는 $x > 2)$

$\leftrightarrow$ $(-1 < x \le 3$ 이고 $x \le 0)$ 또는 $(-1 < x \le 3$ 이고 $x > 2)$

$\leftrightarrow$ $-1 < x \le 0$ 또는 $2 < x \le 3$



26. 다음 중 조건 p, q 에 대하여 명제 $p \to q$ 가 거짓인 것은? (단, x, y 는 실수이다.)

① $p : x = 1$, $\quad q : x^2 - 3x + 2 = 0$

② $p : x^2 = 1$, $\quad q : |x| = 1$

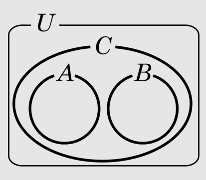
③ $p : x,\ y$는 홀수이다.
$q : x + y$는 짝수이다.

④ 세 집합 $A,\ B,\ C$ 에 대하여
$p : A \cup C = B \cup C$, $\quad q : A = B$

⑤ p : □ABCD 는 마름모이다.
q : □ABCD 는 평행사변형이다.

해설

① $x = 1$ 이면 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 이므로 참이다.
② $x^2 = 1$ 이면 $x = -1,\ 1$ 이므로
$|x| = |-1| = |1| = 1$
따라서, 주어진 명제는 참이다.
③ $x = 2m + 1,\ y = 2n + 1$ ($m,\ n$ 은 정수)이라 하면 $x + y = (2m + 1) + (2n + 1) = 2(m + n + 1)$ 이므로 참이다.
④ (반례) 벤 다이어그램에서 $A \subset C$ 이고 $B \subset C$ 이면 $A \cup C = B \cup C$ 이지만 $A \neq B$ 이다.



⑤ 마름모는 두 쌍의 대변이 각각 평행하므로 평행사변형이다.
따라서, 주어진 명제는 참이다.

27. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 원소 x, y 에 대하여 다음 명제 중 거짓인 것은?

① 어떤 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 = 5$ 이다.

② 어떤 x, y 에 대하여 $x + y \leq 5$ 이다.

③ 모든 x 에 대하여 $x - 1 < 5$ 이다.

④ 어떤 x 에 대하여 $x^2 - 1 \leq 0$ 이다.

⑤ 모든 x 에 대하여 $|x - x^2| \geq 5$ 이다.

해설

⑤ (반례) $x = 1$ 인 경우 $|1 - 1| = 0$ 이므로 거짓이다.

28. 전제집합 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하자. $P = \{-1, 0, 1\}$, $Q = \{-1, a+3\}$, $R = \{2, 4, 2a+7\}$ 이고 $q \to p, p \to \sim r$ 가 항상 참일 때, a 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$q \to p, p \to \sim r$ 가 참이므로 $Q \subset P, P \subset R^c$

$\therefore Q \subset P \subset R^c$

$\{-1, a+3\} \subset \{-1, 0, 1\} \subset \{2, 4, 2a+7\}^c$

$\{-1, a+3\} \subset \{-1, 0, 1\} \cdots$ ㉠

㉠에서 $a + 3 = -1$ 또는 0 또는 1

$\therefore a = -4$ 또는 -3 또는 -2

$\{-1, 0, 1\} \subset \{2, 4, 2a+7\}^c \cdots$ ㉡

㉡에서 $2a + 7 \neq -1, 0, 1$

$2a \neq -8, -7, -6$

$\therefore a \neq -4, -\frac{7}{2}, -3$

따라서 ㉠, ㉡ 을 동시에 만족시키는 a 의 값은 -2 이다.

29. 다음 중 p는 q이기 위한 충분조건이지만, 필요조건은 아닌 것은?

① $p : xz = yz$, $q : x = y$

② p : 3 의 배수, q : 9 의 배수

③ $p : x = 1, y = 1$, $q : x + y = 2, xy = 1$

④ $p : |x - 1| = 2$, $q : x^2 - 2x - 3 = 0$

⑤ $p : a + b > 2$, $q : a > 1$ 또는 $b > 1$

해설

① 필요조건
② 필요조건
③ 필요충분조건
④ 필요충분조건
⑤ [반례] $a = 2$, $b = -10$일 때, $q \to p$가 성립하지 않는다.

30. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $(A \cup B) - A = \varnothing$이 성립하기 위한 필요충분조건인 것은?

① $A \cap B = \varnothing$　② $A \cap B \neq \varnothing$　③ $A \cap B = A$
④ $A \cup B = A$　⑤ $A \cup B = U$

해설

$(A \cup B) - A = \varnothing \iff A \cup B = A$

31. $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 4$일 때, ab 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$a > 0$, $b > 0$일 때,
$a + b \geq 2\sqrt{ab}$이므로
$a + b = 4 \geq 2\sqrt{ab}$, $0 \leq ab \leq 4$
따라서 ab 의 최댓값은 4

32. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \ge (x+3y)^2$

$x^2+y^2=10$이므로 $100 \ge (x+3y)^2$

$\therefore \ -10 \le x+3y \le 10$

$\therefore \ M=10,\ m=-10$

$\therefore \ M-m=10-(-10)=20$

33. 집합 $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $B = \{1,\ 3,\ 5\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 C 의 개수를 구하여라.

㉠ $B \not\subset C$	㉡ $C \subset A$	㉢ $1 \in C,\ 3 \in C$

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

㉠과 ㉢에 의하여 $1 \in C,\ 3 \in C,\ 5 \notin C$ 이다.
따라서, 집합 C 는 1 과 3 을 포함하고 5 를 포함하지 않는 A 의 부분집합이므로 $2^{5-2-1} = 2^2 = 4$ (개) 이다.

34. 집합 $A = \{x \mid x$는 27 의 약수$\}$ 일 때, 다음을 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라.

보기

$\{1\} \subset B \subset A,\ n(B) = 3$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$A = \{1,\ 3,\ 9,\ 27\}$

집합 B 는 원소 1 을 포함한 집합 A 의 부분집합 중 원소의 개수가 3 개인 집합이므로

$\{1,\ 3,\ 9\},\ \{1,\ 3,\ 27\},\ \{1,\ 9,\ 27\}$ 의 3 개이다.

35. 집합 $A = \{x \mid 15 < x < 30,\ x = 3n + 2(n$ 은 자연수$)\}$라고 할 때, 적어도 한 개의 짝수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는?

① 8 개　② 16 개　③ 24 개　④ 32 개　⑤ 40 개

해설

$\mathrm{A} = \{17,\ 20,\ 23,\ 26,\ 29\}$ 이므로 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$ (개) 이고, 이 중에서 짝수를 원소로 하나도 갖지 않는 부분집합은 원소 17, 23, 29 로 만든 부분집합이므로 $2^3 = 8$ (개) 이다.

$\therefore\ 32 - 8 = 24$ (개)

36. $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 의 부분집합 중에서 a 또는 d 를 포함하는 부분집합의 개수를 구하면?

① 4 개　② 8 개　③ 10 개　④ 12 개　⑤ 24 개

해설

(i) a 을 포함하는 경우
$2^{5-1} = 2^4 = 16$ (개)
(ii) d 를 포함하는 경우
$2^{5-1} = 16$ (개)
(i) a 와 d 를 모두 포함하는 경우
$2^{5-2} = 8$ (개)
따라서 구하는 부분집합의 개수는
$16 + 16 - 8 = 24$ (개) 이다.

37. 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면 $P \cup Q = P$, $P \cap R = \phi$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 <u>없는</u> 것은?

① $p \to \sim r$　　② $\sim p \to \sim q$　　③ $q \to r$

④ $q \to \sim r$　　⑤ $r \to \sim p$

해설

$P \cup Q = P \Rightarrow Q \subset P \Rightarrow q \to p \Leftrightarrow \sim p \to \sim q$

$P \cap R = \varnothing \Rightarrow p \to \sim r \Leftrightarrow r \to \sim p$ $q \to p, p \to \sim r$ 이므로 $q \to \sim r$

38. P섬에 사는 사람들은 오직 진실만을 말하고, Q섬에 사는 사람들은 오직 거짓만을 말한다. 이 두 섬으로부터 온 세 사람 A, B, C가 있다. A, B는 다음과 같이 말했다.

A : 우리는 모두 Q섬에서 왔다.B : 우리들 중 오직 한 사람만이 P섬에서 왔다.

A, B, C는 각각 어느 섬으로부터 왔는가?

① A, B는 P섬, C는 Q섬에서 왔다.

② A, B는 Q섬, C는 Q섬에서 왔다.

③ A, B, C는 모두 Q섬에서 왔다.

④ B 는 P섬, A, C는 Q섬에서 왔다.

⑤ B 는 Q섬, A, C 는 P섬에서 왔다.

해설

A의 말은 거짓이다. 즉, A는 Q섬 사람이고 ‘우리 모두 Q섬 사람이다.’가 거짓이므로 B, C중 P섬 사람이 있어야 한다. 만일 B 가 P섬 사람이면 B의 말이 진실이므로 C는 Q섬에서 왔다. 그러나 B가 Q섬에서 왔다면 B의 말이 거짓이므로 P섬 사람이 둘 이상이어야 하는데 A와 B가 Q섬 사람이므로 모순이다. 따라서, B는 P섬, A, C는 Q섬에서 왔다.

39. 다음 중 p는 q이기 위한 충분조건인 것은?

① $p : x = 1$ 이고 $y = 1$, $q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$

② $p : |x-1| = 2$, $q : x^2 - 2x + 3 = 0$

③ $p : a > 3$, $q : a^2 > 9$

④ $p : a^2 = ab$, $q : a = b$

⑤ $p : |a| < |b|$, $q : a < b$

해설

$p \rightarrow q$ 이면 (진리집합 P)$\subset$ (진리집합 Q)
① $P : x = 1,\ y = 1$, $Q : x = 1\ \ y = 1 \Rightarrow$ 필요충분조건
② $P : x = 3$ 또는 $x = -1$, $Q : x = 1 \pm \sqrt{2}i \Rightarrow$ 서로소
③ $P : a > 3$, $Q : a < -3$ 또는 $a > 3 \Rightarrow$ 충분조건
④ $P : a = 0$ 또는 $a = b$, $Q : a = b \Rightarrow$ 필요조건
⑤ $p \not\rightarrow q$, $q \rightarrow p$ (반례 : $a = 2$, $b = -3$)

40. 전체 집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A-B)^c = B-A$ 가 성립할 필요충분조건을 구하면?

① $A \cap B = \varnothing$　　② $A \cup B = U$　　③ $A \subset B^c$

④ $A^c \cup B = U$　　⑤ $A = B^c$

해설

$(A-B)^c = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B$, $B-A = A^c \cap B$ $A^c \cup B = A^c \cap B$

에서 $A^c = B$

즉, $A = B^c$

41. 세 집합 $A = \{x | -3 \le x \le 6\}$, $B = \{x \mid x \le a\}$, $C = \left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{2} \le x \le b\right\}$

에 대하여, A 는 C 이기 위한 필요조건이고, A 는 B 이기위한 충분조건일 때, a 의 최솟값을 M, b 의 최댓값을 n 라고 하면 $2M - n^2$ 의 값은?

① -24 ② -12 ③ 0 ④ 12 ⑤ 24

해설

i) $C \subset A$ 조건에 만족하려면 $b \le 6$

$\therefore b$ 의 최댓값, $n = 6$

ii) $A \subset B$ 조건에 만족하려면 $a \ge 6$

$\therefore a$ 의 최솟값, $M = 6 \Rightarrow 2M - n^2 = -24$

42. 전체집합 U의 임의의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 <보기> 의 (가), (나)에 들어갈 것을 순서대로 나열한 것은?

보기

(1) $A \subset B$는 $A - B = \varnothing$이 되기 위한 $\boxed{\text{(가)}}$ 조건이다.
(2) $B = C$는 $A \cup B = A \cup C$이 되기 위한 $\boxed{\text{(나)}}$ 조건이다.

① 필요, 필요충분
② 필요, 필요
③ 필요충분, 필요충분
④ 필요충분, 충분
⑤ 충분, 필요충분

해설

(1)은 명제, 역 모두 성립하는 필요충분조건이고,
(2)는 역일 경우에 성립하지 않는 경우가 있으므로 충분조건이다.
(반례) 역의 경우에서 $A \supset B$, $A \supset C$, $B \subset C$이면 성립하지 않는다.

43. 네 조건 p, q, r, s에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건, r은 q이기 위한 필요조건, s는 $\sim r$이기 위한 충분조건 일 때 다음 중 옳은 것은?

① $r \to q$　② $q \to \sim p$　③ $s \to \sim q$

④ $\sim s \to \sim p$　⑤ $\sim r \to p$

해설

$p \to q \quad s \to \sim r \quad q \to r$

$q \to r$의 대우 : $\sim r \to \sim q$

$\therefore s \to \sim r, \sim r \to \sim q$ 이므로 $s \to \sim q$

44. $x > 0,\ y > 0$ 일 때, $\left(x+\frac{1}{4y}\right)\left(\frac{1}{x}+8y\right)$ 의 최솟값을 다음과 같이 구하였다. 이 과정에서 최초로 잘못된 부분과 옳은 답을 구하면?

> $\left(x+\frac{1}{4y}\right)\left(\frac{1}{x}+8y\right) \geq 2\sqrt{\frac{x}{4y}} \times 2\sqrt{\frac{8y}{x}}$: ㈎
>
> $\left(\because\quad x+\frac{1}{4y} \underset{2}{\geq} \sqrt{x \times \frac{1}{4y}}\right.$, : ㈏
>
> $\left.\frac{1}{x}+8y \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \times 8y}\right)$: ㈐
>
> 따라서 최솟값은 $4\sqrt{2}$: ㈑

① ㈎ , $4\sqrt{2}+3$ ② ㈏ , $2+2\sqrt{2}$ ③ ㈐ , $3+2\sqrt{2}$

④ ㈑ , $4+3\sqrt{2}$ ⑤ ㈎ , $3+2\sqrt{2}$

해설

$x>0,\ y>0$ 일 때

ⅰ) $x+\frac{1}{4y} \geq 2\sqrt{x \times \frac{1}{4y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$

이 때, 등호는 $x=\frac{1}{4y}$, 즉 $xy=\frac{1}{4}$ 일 때 성립한다.

ⅱ) $\frac{1}{x}+8y \geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot 8y} = 4\sqrt{\frac{2y}{x}}$

이 때, 등호는 $\frac{1}{x}=8y$, 즉 $xy=\frac{1}{8}$ 일 때 성립한다.

ⅰ), ⅱ)에서 등호가 성립하는 조건이 다르므로 ㈎와 같이 나타낼 수 없다.

ⅲ) $\left(x+\frac{1}{4y}\right)\left(\frac{1}{x}+8y\right)$

$= 3+\frac{1}{4xy}+8xy \geq 3+2\sqrt{\frac{1}{4xy}\cdot 8xy}$

$= 3+2\sqrt{2}$

$\therefore$ 최솟값은 $3+2\sqrt{2}$

45. 세 양수 $a,\ b,\ c$가 $abc=1$ 을 만족할 때, 이 사실로부터 추론할 수 있는 것을 보기에서 모두 고르면?

Ⅰ. $a+b+c \geq 3$
Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \geq 3$
Ⅲ. $ab+bc+ca \geq 3$
Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅲ ③ Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅰ, Ⅲ, Ⅳ ⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

$abc=1$이므로
Ⅰ. $a+b+c \geq 3\times \sqrt[3]{abc}=3$
Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2\times b^2\times c^2}=3$
Ⅲ. $ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{ab\times bc\times ca}=3$
Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1)$
$=abc+(ab+bc+ca)+(a+b+c)+1$
$\geq 1+3+3+1=8$

46. x가 실수일 때, $\dfrac{x^2-x+1}{x^4-2x^3+3x^2-2x+2}$의 최댓값은?

① $-\dfrac{3}{2}$　② $-\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\dfrac{3}{2}$　⑤ 2

해설

$x^4-2x^3+3x^2-2x+2$

$=x^4-2x^3+3x^2-2x+1+1$

$=x^2\left(x^2-2x+3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)+1$

$=x^2\left\{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+3\right\}+1$

$=x^2\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+1\right\}+1$

$=x^2\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right)^2+1$

$=(x^2-x+1)^2+1$

$\therefore$ 준식 $=\dfrac{x^2-x+1}{(x^2-x+1)^2+1}$이고

$x^2-x+1=\left(x^2-x+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{3}{4}$

$=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$이므로

$x^2-x+1=t$로 치환 $t\geq\dfrac{3}{4}$하면

준 식 : $\dfrac{t}{t^2+1}=\dfrac{1}{\dfrac{t^2+1}{t}}=\dfrac{1}{t+\dfrac{1}{t}}$

여기서 $t+\dfrac{1}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$

$(\because\ t\geq\dfrac{3}{4})$

따라서 $\dfrac{t^{-1}+1}{t}$의 최솟값은 2이고

$\dfrac{t}{t^2+1}$의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$이다.

47. 다음은 a, b, c, d, x, y, z, w가 실수일 때, 부등식 $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2) \geq (ax+by+cz+dw)^2$이 성립함을 증명하는 과정의 일부이다. ㉠, ㉡ 부분에 들어갈 기호가 순서대로 적당한 것은?

> [증명] 모든 실수 t에 대하여 다음 부등식이 성립한다.
> $(at-x)^2+(bt-y)^2+(ct-z)^2+(dt-w)^2 \boxed{㉠} 0$
> 이것을 t에 관하여 정리하면
> $(a^2+b^2+c^2+d^2)t^2-2(ax+by+cz+dw)t$
> $+(x^2+y^2+z^2+w^2) \boxed{㉠} 0$
> 따라서 항상 성립하기 위해서는
> $(ax+by+cz+dw)^2-$
> $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2) \boxed{㉡} 0$······(이하 생략)

① >, <　② ≥, <　③ ≤, >　④ ≤, ≥　⑤ ≥, ≤

해설

생략

48. 집합 $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 2m-1\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1 과 3 은 반드시 포함하고 5 와 $2m-1$ 은 포함하지 않는 부분집합의 개수가 32 개일 때 자연수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 2m-1\} \to\ n(A) = m$ (개)
원소 1 과 3 은 반드시 포함하고 5 와 $2m-1$ 은 반드시 포함하지 않는 부분집합의 개수가 32 개이므로
$2^{m-2-2} = 32$, $m-4 = 5$
$m = 9$

49. A, B, C 세 학생 중 한 명이 지각을 하였다. 다음은 누가 지각을 했는가에 대한 서로의 주장이다.

A: 내가 지각을 하였다.
B: A의 말은 진실이다.
C: B는 거짓말을 하였고, B가 지각하였다.

세 사람 중 한 사람만이 진실을 말하고 있다고 할 때, 위의 진술에서 진실을 말하고 있는 학생과 지각을 한 학생을 차례대로 나열하면?

① A, A ② A, B ③ B, C ④ C, A ⑤ C, B

해설

(i) A가 진실을 말한 경우 B는 거짓말을 한 것이었고 A의 말이 진실이 아닌 것이 되어 모순이다.
(ii) B가 진실을 말한 경우 A는 거짓말을 한 것이고, 이는 B의 말과 모순이다.
(iii) C가 진실을 말한 경우 A, B는 모두 거짓말을 하였고, B가 지각하였다.
따라서, 진실을 말한 학생은 C이고, 지각한 학생은 B이다.

50. 실수 x, y 에 대하여 $2x^2+5y^2-4xy-4x-2y$ 의 최솟값을 구하면?

① -8 ② -7 ③ -6 ④ -5 ⑤ -4

해설

$2x^2+5y^2-4xy-4x-2y \geq k$ 로 놓고,
x에 관해 내림차순으로 정리하면
$2x^2-4(1+y)x+5y^2-2y-k \geq 0$
위의 식이 항상 성립하여야 하므로
$\frac{D}{4}=4(1+y)^2-2(5y^2-2y-k) \leq 0$
$\therefore 3y^2-6y-k-2 \geq 0$
위의 식이 항상 성립하여야 하므로
$\frac{D}{4}=9+3(k+2) \leq 0 \quad \therefore k \leq -5$
따라서, 구하는 $2x^2+5y^2-4xy-4x-2y$ 의 최솟값은 k 의 최댓값 -5 이다.