1. 전체집합 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 조건 $x^2 - 2 > 0$의 진리집합은?

① $\varnothing$ ② $\{0, 1\}$ ③ $\{3, 4, 5\}$
④ $\{2, 3, 4, 5\}$ ⑤ U

해설

주어진 조건 $x^2 - 2 > 0$ 에 $x = 0$을 대입하면 $0 - 2 > 0$ (거짓)
$x = 1$을 대입하면 $1 - 2 > 0$ (거짓)
$x = 2$를 대입하면 $4 - 2 > 0$ (참)
$x = 3$을 대입하면 $9 - 2 > 0$ (참)
$x = 4$를 대입하면 $16 - 2 > 0$ (참)
$x = 5$를 대입하면 $25 - 2 > 0$ (참)
따라서 구하는 진리집합은 $\{2, 3, 4, 5\}$

2. $x > y > 0$인 실수 x, y에 대하여 $\frac{x}{1+x}$, $\frac{y}{1+y}$의 대소를 비교하면?

① $\frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y}$　② $\frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y}$　③ $\frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$

④ $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}$　⑤ $\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y}$

해설

$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}$ 이라하면

$$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)}$$

$$= \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} > 0$$

따라서 $\therefore \frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$

3. 두 양수 a, b에 대하여 다음 설명 중 틀린 것은?

① a, b의 산술 평균은 $\dfrac{a+b}{2}$이다.

② $\sqrt{ab}$는 a, b의 기하평균이다.

③ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$은 절대부등식이다.

④ $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$이면 반드시 $b = \dfrac{1}{a}$이다.

⑤ $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$는 항상 성립한다.

해설

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \cdots$ 절대부등식

$\dfrac{a+b}{2}$: 산술평균, $\sqrt{ab}$: 기하평균

④: 절대부등식의 등호는 $a = b$일 때 성립한다.

4. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 15 의 약수$\}, B = \{x \mid x$는 5 의 약수$\}$ 에 대하여 집합 A 의 부분집합 중 집합 B의 원소를 포함하지 않는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 4 개

해설

집합 A 와 B 를 각각 원소나열법으로 나타내면 $A = \{1, 3, 5, 15\}, B = \{1, 5\}$ 이다. 따라서 집합 A 의 부분집합 중 집합 B 의 원소를 포함하지 않는 부분집합은 $\varnothing$, $\{3\}$,$\{15\}$, $\{3, 15\}$ 이고 개수는 4 개이다.

5. 집합 $A=\{x\,|\,x$는 10 초과 20 미만인 짝수$\}$ 일 때, 집합 A 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 16 개

해설

$A=\{12,\ 14,\ 16,\ 18\}$

집합 A 의 부분집합의 개수 : $2^4=16$

6. $\{2, 3, 4\} \subset A \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 를 만족하는 집합 A 의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

집합 A 는 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중 원소 2, 3, 4를 반드시 포함하는 집합이므로
그 개수는 $2^2 = 4$ (개)

7. $\{a\} \subset X \subset \{a,\ b,\ c,\ d\}$ 이고 원소의 개수가 3 개인 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** 개

▷ **정답 :** 3 개

해설

$\{a\} \subset X \subset \{a,\ b,\ c,\ d\}$ 이므로
a를 포함하는 $\{a,\ b,\ c,\ d\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 3 개인 집합을 구하면 된다.
a를 제외한 $\{b,\ c,\ d\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 2개인 집합을 구하면 $\{b,\ c\}, \{b,\ d\}, \{c,\ d\}$ 의 3개이므로, a 를 포함하는 $\{a,\ b,\ c,\ d\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 3개인 집합은 $\{a,\ b,\ c\}, \{a,\ b,\ d\}, \{a,\ c,\ d\}$의 3개이다.

8. $\{2,\ 3\} \subset X \subset \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 이고 원소의 개수가 4 개인 집합 X 의 원소들의 합은?

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

해설

$\{2,\ 3\} \subset X \subset \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 이므로
원소로 2, 3 을 포함하는 $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 4 개인 집합을 구하면 된다.
원소 2, 3 을 제외한 $\{5,\ 7\}$ 의 부분집합은 $\varnothing$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{5,\ 7\}$ 의 4 개가 있으므로, 원소 2, 3 을 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합에는 $\{2,\ 3\}$, $\{2,\ 3,\ 5\}$, $\{2,\ 3,\ 7\}$, $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 이 있다. 이 중 원소의 개수가 4 개인 것은 $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 이므로 원소의 합은
$2+3+5+7=17$ 이다.

9. 두 집합 $A=\{11,\ 13\}$, $B=\{9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 8 개

해설

집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중 원소 11, 13 을 모두 포함하는 집합이므로 구하는 집합 X 의 개수는 $2^{5-2}=2^3=8$ (개)

10. 집합 $A = \{x|x$는 10 이하의 소수$\}$에 대하여 $\{2,\ 5\} \subset X \subset A$를 만족하는 집합 X로 옳지 않은을 모두 고르면?(정답 2개)

① $\{2,\ 3,\ 4\}$ ② $\{2,\ 3,\ 5\}$ ③ $\{2,\ 5,\ 7\}$
④ $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ ⑤ $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

해설

$A = \{2, 3, 5, 7\}$이고, $\{2,\ 5\} \subset X \subset A$이므로 집합 X는 $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$의 부분집합 중 원소 2, 5를 반드시 포함하는 집합이다.

① $5 \notin \{2,\ 3,\ 4\}$

④ $4 \notin A$

따라서 집합 X로 옳지 않은 것은 ①, ④이다.

11. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 X의 개수를 구하여라.

$\{1, 9\} \subset X \subset A$

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 8 개

해설

X는 원소 1과 9를 포함하는 집합 A의 부분집합이므로 X의 개수는 $2 \times 2 \times 2 = 8$(개)이다.

12. $\{a,\ c\} \subset X \subset \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 5　　② 8　　③ 10　　④ 16　　⑤ 32

해설

집합 X 는 $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 의 부분집합이면서 a, c 를 포함하는 집합이므로 $\{b,\ d,\ e\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

$2^3 = 8$(개)

13. 집합 $A = \{a,\ b,\ c\}$ 의 부분집합 중 원소 a 또는 b 를 포함하는 부분집합의 개수는?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

원소 a 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$2^{3-1} = 4$ (개)

원소 b 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$2^{3-1} = 4$ (개)

원소 a, b 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$2^{3-2} = 2$ (개)

원소 a 또는 b 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$4 + 4 - 2 = 6$ (개)

14. 집합 $A = \{x \mid x$는 9보다 작은 자연수$\}$ 의 부분집합 중 원소가 홀수로만 이루어진 부분집합은 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ **답 :** 개

▷ **정답 :** 15 개

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$

짝수를 제외한 $\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 의 부분집합을 먼저 구하면

원소가 0 개인 부분집합 : $\varnothing$

원소가 1 개인 부분집합 : $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{7\}$

원소가 2 개인 부분집합 : $\{1,\ 3\}$, $\{1,\ 5\}$, $\{1,\ 7\}$, $\{3,\ 5\}$, $\{3,\ 7\}$, $\{5,\ 7\}$

원소가 3 개인 부분집합 : $\{1,\ 3,\ 5\}$, $\{1,\ 3,\ 7\}$, $\{1,\ 5,\ 7\}$, $\{3,\ 5,\ 7\}$

원소가 4 개인 부분집합 : $\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$

이고, 이 중 원소가 0 개인 부분집합은 홀수가 한 개도 포함되어 있지 않으므로 원소가 홀수로만 이루어진 부분집합이 아니다.

따라서 홀수로만 이루어진 부분집합의 갯수는 15 개이다.

15. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 $\{1,\ 3\} \cap X = \phi$ 를 만족하는 A 의 진부분집합 X 의 개수는?

① 7 개 ② 15 개 ③ 16 개 ④ 31 개 ⑤ 32 개

해설

집합 X 가 원소 1, 3 을 포함하지 않으므로 A 의 진부분집합 X 의 개수는 $\{2,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 의 부분집합의 개수를 구하면 된다.

$\therefore\ 2^4 = 16$ (2^n : 부분집합의 개수, n : 원소의 개수)

따라서, 진부분집합은 $16 - 1 = 15$(개)이다.

16. 두 집합 $A=\{2,4\}, B=\{2,4,6,8,10,12\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B$ 이고 $X \neq A, X \neq B$ 를 동시에 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 8 개 ② 10 개 ③ 12 개 ④ 14 개 ⑤ 16 개

해설

집합 X는 $A \subset X, X \subset B$ 에서 $\{2,4\}$ 는 무조건 포함하므로, 그것을 제외한 $\{6,8,10,12\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

$\therefore\ 2^4=16$

여기서 $X=A, X=B$ 인 경우를 뺀다

$\therefore\ 16-2=14$(개)

17. 집합 X가 집합 $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$의 부분집합일 때, $\{a,\ b\} \cup X = \{a,\ b,\ c,\ d\}$를 만족하는 집합 X의 개수는?

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

$\{a,\ b\} \cup X = \{a,\ b,\ c,\ d\} \rightarrow X$ 는 $\{a,\ b,\ c,\ d\}$의 부분집합 중 $c,\ d$를 항상 원소로 가지는 집합이다. $\therefore\ 2^{4-2} = 2^2 = 4$

18. 전체집합 $U=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$의 두 부분집합 $A,\ X$에 대하여 $A=\{b,\ c,\ d\}$일 때, $A\subset X\subset U$를 만족하는 집합 X의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 4 개

해설

전체집합 $U=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$의 부분집합 중에서 $b,\ c,\ d$를 원소로 갖는 부분집합의 개수

$\therefore\ 2^{5-3}=4$(개)

19. $A=\{a,b,c,d,e\}$ 일 때, $X\subset A$, $\{b,c,d\}\cap X=\{c,d\}$를 만족하는 집합 X의 개수는?

① 10 개 ② 8 개 ③ 6 개 ④ 4 개 ⑤ 2 개

해설

c, d는 반드시 포함하고 b는 포함하지 않는 A의 부분집합과 같다.

$\therefore\ 2^{5-3}=4$(개)

20. 두 집합 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{1,2,3,6,7\}$ 에 대하여 다음의 두 조건을 모두 만족시키는 집합 X 의 개수를 구하여라.

$A\cup X=A,\ (A\cap B)\cup X=X$

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 4 개

해설

$A\cup X=A$ 이므로 $X\subset A\cdots$ ㉠

$(A\cap B)\cup X=X$ 이므로 $(A\cap B)\subset X\cdots$ ㉠

㉠, ㉡으로부터 $(A\cap B)\subset X\subset A$

즉, 집합 X 는 $(A\cap B)$ 의 원소를 포함하는 집합 A 의 부분집합이다.

$A\cap B=\{1,2,3\}$, $A=\{1,2,3,4,5\}$ 이므로 $\{1,2,3\}\subset X\subset\{1,2,3,4,5\}$

집합 X 는 $\{1,2,3,4,5\}$ 의 부분집합 중 원소 1, 2, 3을 포함하는 집합이므로 그 개수는 $2^{5-3}=2^2=4$(개)

21. 집합 $A=\{1,2,\cdots,n\}$ 에서 1 을 포함하지 않는 부분집합의 개수가 4 개라고 할 때, 자연수 n 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$2^{(1\text{을 제외한 원소의 개수})}=2^{n-1}=4=2^2 \quad \therefore n=3$

22. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3, \cdots, n\}$ 의 부분집합의 개수가 16 개일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$2^n = 16 \quad \therefore n = 4$

23. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 $4, 6$ 을 반드시 포함하는 부분집합의 개수가 64 개일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로 원소 $4,\ 6$ 을 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 2^{n-2} (개) 이다.

$2^{n-2} = 64,\ 2^{n-2} = 2^6$

$n - 2 = 6$ 이므로 $n = 8$

24. p_n 이 다음과 같을 때, $f(p_n) = 1$ (p_n이 명제이면) $f(p_n) = -1$ (p_n이 명제가 아니면) 로 정의한다. 이 때, $f(p_1)+f(p_2)+f(p_3)$ 의 값을 구하면? (단, $n = 1, 2, 3$)

p_1 : $x^2 - x - 2 = 0$ p_2 : 16의 양의 약수는 모두 짝수이다. p_3 : $\sqrt{3}$ 은 유리수이다.

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$f(p_n) = \begin{cases} 1 \ (p_n\text{이 명제이다.}) \\ -1 \ (p_n\text{이 명제가 아니다.}) \end{cases}$$

p_1 : $x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow$ 명제가 아니다.($\because$ x 값에 따라 참 일수도 거짓일수도 있다.)

p_2 : 거짓, p_3 : 거짓 $\rightarrow$ 모두 거짓인 명제이다.

$\therefore$ $f(p_1)+f(p_2)+f(p_3) = (-1)+1+1 = 1$

25. 다음 두 조건 p, q 에 대하여 '$\sim p$ 또는 q '의 부정은?

$$p \ : \ -1 < x \le 3, \quad q \ : \ 0 < x \le 2$$

① $-1 < x \le 0$ 또는 $2 < x \le 3$

② $-1 < x < 0$ 또는 $2 \le x \le 3$

③ $-1 < x \le 3$

④ $0 < x \le 2$

⑤ x 는 모든 실수

해설

$\sim(\sim p$ 또는 $q) \ \leftrightarrow \ p$ 이고 $\sim q$ 그런데

$\sim q \ : \ x \le 0$ 또는 $x > 2$ 이므로 p 이고 $\sim q$

$\leftrightarrow \ (-1 < x \le 3)$ 이고 $(x \le 0$ 또는 $x > 2)$

$\leftrightarrow \ (-1 < x \le 3$ 이고 $x \le 0)$ 또는 $(-1 < x \le 3$ 이고 $x > 2)$

$\leftrightarrow -1 < x \le 0$ 또는 $2 < x \le 3$

26. 다음 중 조건 p, q 에 대하여 명제 $p \to q$ 가 거짓인 것은? (단, x, y 는 실수이다.)

① $p : x = 1$, $\quad q : x^2 - 3x + 2 = 0$

② $p : x^2 = 1$, $\quad q : |x| = 1$

③ $p : x,\ y$는 홀수이다.
$q : x + y$는 짝수이다.

④ 세 집합 $A,\ B,\ C$ 에 대하여
$p : A \cup C = B \cup C$, $\quad q : A = B$

⑤ $p :$ □ABCD 는 마름모이다.
$q :$ □ABCD 는 평행사변형이다.

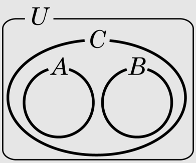
해설

① $x = 1$ 이면 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 이므로 참이다.

② $x^2 = 1$ 이면 $x = -1,\ 1$ 이므로
$|x| = |-1| = |1| = 1$
따라서, 주어진 명제는 참이다.

③ $x = 2m + 1,\ y = 2n + 1$ ($m,\ n$ 은 정수)이라 하면 $x + y = (2m + 1) + (2n + 1) = 2(m + n + 1)$ 이므로 참이다.

④ (반례) 벤 다이어그램에서 $A \subset C$ 이고 $B \subset C$ 이면 $A \cup C = B \cup C$ 이지만 $A \neq B$ 이다.



⑤ 마름모는 두 쌍의 대변이 각각 평행하므로 평행사변형이다.
따라서, 주어진 명제는 참이다.

27. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 원소 x, y 에 대하여 다음 명제 중 거짓인 것은?

① 어떤 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 = 5$ 이다.

② 어떤 x, y 에 대하여 $x + y \leq 5$ 이다.

③ 모든 x 에 대하여 $x - 1 < 5$ 이다.

④ 어떤 x 에 대하여 $x^2 - 1 \leq 0$ 이다.

⑤ 모든 x 에 대하여 $|x - x^2| \geq 5$ 이다.

해설

⑤ (반례) $x = 1$ 인 경우 $|1 - 1| = 0$ 이므로 거짓이다.

28. 전제집합 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하자. $P = \{-1, 0, 1\}$, $Q = \{-1, a+3\}$, $R = \{2, 4, 2a+7\}$ 이고 $q \to p, p \to \sim r$ 가 항상 참일 때, a 의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

$q \to p, p \to \sim r$ 가 참이므로 $Q \subset P, P \subset R^c$

$\therefore Q \subset P \subset R^c$

$\{-1, a+3\} \subset \{-1, 0, 1\} \subset \{2, 4, 2a+7\}^c$

$\{-1, a+3\} \subset \{-1, 0, 1\} \cdots$ ㉠

㉠에서 $a + 3 = -1$ 또는 0 또는 1

$\therefore a = -4$ 또는 -3 또는 -2

$\{-1, 0, 1\} \subset \{2, 4, 2a+7\}^c \cdots$ ㉡

㉡에서 $2a + 7 \neq -1, 0, 1$

$2a \neq -8, -7, -6$

$\therefore a \neq -4, -\frac{7}{2}, -3$

따라서 ㉠, ㉡ 을 동시에 만족시키는 a 의 값은 -2 이다.

29. 다음 중 p는 q이기 위한 충분조건이지만, 필요조건은 아닌 것은?

① $p : xz = yz,\ q : x = y$

② p : 3 의 배수, q : 9 의 배수

③ $p : x = 1, y = 1,\ q : x + y = 2, xy = 1$

④ $p : |x - 1| = 2,\ q : x^2 - 2x - 3 = 0$

⑤ $p : a + b > 2,\ q : a > 1$ 또는 $b > 1$

해설

① 필요조건
② 필요조건
③ 필요충분조건
④ 필요충분조건
⑤ [반례] $a = 2,\ b = -10$일 때, $q \to p$가 성립하지 않는다.

30. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $(A \cup B) - A = \varnothing$이 성립하기 위한 필요충분조건인 것은?

① $A \cap B = \varnothing$　② $A \cap B \neq \varnothing$　③ $A \cap B = A$

④ $A \cup B = A$　⑤ $A \cup B = U$

해설

$(A \cup B) - A = \varnothing \Leftrightarrow A \cup B = A$

31. $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 4$일 때, ab 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$a > 0$, $b > 0$일 때,
$a + b \geq 2\sqrt{ab}$이므로
$a + b = 4 \geq 2\sqrt{ab}$, $0 \leq ab \leq 4$
따라서 ab의 최댓값은 4

32. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$

$x^2+y^2=10$이므로 $100 \geq (x+3y)^2$

$\therefore \ -10 \leq x+3y \leq 10$

$\therefore \ M=10,\ m=-10$

$\therefore \ M-m=10-(-10)=20$

33. 집합 $A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 C 의 개수를 구하여라.

㉠ $B \not\subset C$	㉡ $C \subset A$	㉢ $1 \in C,\ 3 \in C$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

㉠과 ㉢에 의하여 $1 \in C,\ 3 \in C,\ 5 \notin C$ 이다.
따라서, 집합 C 는 1 과 3 을 포함하고 5 를 포함하지 않는 A 의 부분집합이므로 $2^{5-2-1}=2^2=4$ (개) 이다.

34. 집합 $A = \{x \mid x$는 27 의 약수$\}$ 일 때, 다음을 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라.

보기

$\{1\} \subset B \subset A,\ n(B) = 3$

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$A = \{1,\ 3,\ 9,\ 27\}$
집합 B 는 원소 1 을 포함한 집합 A 의 부분집합 중 원소의 개수가 3 개인 집합이므로
$\{1,\ 3,\ 9\},\ \{1,\ 3,\ 27\},\ \{1,\ 9,\ 27\}$ 의 3 개이다.

35. 집합 $A = \{x \mid 15 < x < 30,\ x = 3n + 2(n\text{은 자연수})\}$라고 할 때, 적어도 한 개의 짝수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는?

① 8 개　　② 16 개　　③ 24 개　　④ 32 개　　⑤ 40 개

해설

$A = \{17,\ 20,\ 23,\ 26,\ 29\}$ 이므로 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$ (개) 이고, 이 중에서 짝수를 원소로 하나도 갖지 않는 부분집합은 원소 17, 23, 29 로 만든 부분집합이므로 $2^3 = 8$ (개) 이다.

$\therefore\ 32 - 8 = 24$ (개)

36. $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 의 부분집합 중에서 a 또는 d 를 포함하는 부분집합의 개수를 구하면?

① 4 개 ② 8 개 ③ 10 개 ④ 12 개 ⑤ 24 개

해설

(i) a 을 포함하는 경우

$2^{5-1} = 2^4 = 16$ (개)

(ii) d 를 포함하는 경우

$2^{5-1} = 16$ (개)

(i) a 와 d 를 모두 포함하는 경우

$2^{5-2} = 8$ (개)

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$16 + 16 - 8 = 24$ (개) 이다.

37. 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면 $P \cup Q = P$, $P \cap R = \phi$인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 <u>없는</u> 것은?

① $p \to \sim r$ ② $\sim p \to \sim q$ ③ $q \to r$

④ $q \to \sim r$ ⑤ $r \to \sim p$

해설

$P \cup Q = P \Rightarrow Q \subset P \Rightarrow q \to p \Leftrightarrow \sim p \to \sim q$

$P \cap R = \varnothing \Rightarrow p \to \sim r \Leftrightarrow r \to \sim p$ $q \to p, p \to \sim r$ 이므로 $q \to \sim r$

38. P섬에 사는 사람들은 오직 진실만을 말하고, Q섬에 사는 사람들은 오직 거짓만을 말한다. 이 두 섬으로부터 온 세 사람 A, B, C가 있다. A, B는 다음과 같이 말했다.

A : 우리는 모두 Q섬에서 왔다.B : 우리들 중 오직 한 사람만이 P섬에서 왔다.

A, B, C는 각각 어느 섬으로부터 왔는가?

① A, B는 P섬, C는 Q섬에서 왔다.

② A, B는 Q섬, C는 Q섬에서 왔다.

③ A, B, C는 모두 Q섬에서 왔다.

④ B는 P섬, A, C는 Q섬에서 왔다.

⑤ B는 Q섬, A, C는 P섬에서 왔다.

해설

A의 말은 거짓이다. 즉, A는 Q섬 사람이고 '우리 모두 Q섬 사람이다.'가 거짓이므로 B, C중 P섬 사람이 있어야 한다. 만일 B가 P섬 사람이면 B의 말이 진실이므로 C는 Q섬에서 왔다. 그러나 B가 Q섬에서 왔다면 B의 말이 거짓이므로 P섬 사람이 둘 이상이어야 하는데 A와 B가 Q섬 사람이므로 모순이다. 따라서, B는 P섬, A, C는 Q섬에서 왔다.

39. 다음 중 p는 q이기 위한 충분조건인 것은?

① $p: x=1$ 이고 $y=1$, $q: x+y=2$ 이고 $xy=1$

② $p: |x-1|=2$, $q: x^2-2x+3=0$

③ $p: a>3$, $q: a^2>9$

④ $p: a^2=ab$, $q: a=b$

⑤ $p: |a|<|b|$, $q: a<b$

해설

$p \rightarrow q$ 이면 (진리집합 P)$\subset$ (진리집합 Q)

① $P: x=1,\ y=1$, $Q: x=1\ \ y=1 \Rightarrow$ 필요충분조건

② $P: x=3$ 또는 $x=-1$, $Q: x=1\pm\sqrt{2}i \Rightarrow$ 서로소

③ $P: a>3$, $Q: a<-3$ 또는 $a>3 \Rightarrow$ 충분조건

④ $P: a=0$ 또는 $a=b$, $Q: a=b \Rightarrow$ 필요조건

⑤ $p \not\rightarrow q$, $q \rightarrow p$ (반례 : $a=2$, $b=-3$)

40. 전체 집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A-B)^c = B-A$ 가 성립할 필요충분조건을 구하면?

① $A \cap B = \varnothing$ ② $A \cup B = U$ ③ $A \subset B^c$

④ $A^c \cup B = U$ ⑤ $A = B^c$

해설

$(A-B)^c = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B$, $B-A = A^c \cap B$ $A^c \cup B = A^c \cap B$

에서 $A^c = B$

즉, $A = B^c$

41. 세 집합 $A=\{x|-3\le x\le 6\}$, $B=\{x\mid x\le a\}$, $C=\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{2}\le x\le b\right\}$ 에 대하여, A 는 C 이기 위한 필요조건이고, A 는 B 이기위한 충분조건일 때, a 의 최솟값을 M, b 의 최댓값을 n 라고 하면 $2M-n^2$ 의 값은?

① -24 ② -12 ③ 0 ④ 12 ⑤ 24

해설

ⅰ) $C\subset A$ 조건에 만족하려면 $b\le 6$

$\therefore b$ 의 최댓값, $n=6$

ⅱ) $A\subset B$ 조건에 만족하려면 $a\ge 6$

$\therefore a$ 의 최솟값, $M=6\Rightarrow 2M-n^2=-24$

42. 전체집합 U의 임의의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 <보기>의 (가), (나)에 들어갈 것을 순서대로 나열한 것은?

보기

(1) $A \subset B$는 $A - B = \varnothing$이 되기 위한 $\boxed{\text{(가)}}$ 조건이다.
(2) $B = C$는 $A \cup B = A \cup C$이 되기 위한 $\boxed{\text{(나)}}$ 조건이다.

① 필요, 필요충분
② 필요, 필요
③ 필요충분, 필요충분
④ 필요충분, 충분
⑤ 충분, 필요충분

해설

(1)은 명제, 역 모두 성립하는 필요충분조건이고,
(2)는 역일 경우에 성립하지 않는 경우가 있으므로 충분조건이다.
(반례) 역의 경우에서 $A \supset B$, $A \supset C$, $B \subset C$이면 성립하지 않는다.

43. 네 조건 p, q, r, s에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건, r은 q이기 위한 필요조건, s는 $\sim r$이기 위한 충분조건 일 때 다음 중 옳은 것은?

① $r \to q$　　② $q \to \sim p$　　③ $s \to \sim q$

④ $\sim s \to \sim p$　　⑤ $\sim r \to p$

해설

$p \to q \quad s \to \sim r \quad q \to r$

$q \to r$의 대우 : $\sim r \to \sim q$

$\therefore$ $s \to \sim r, \sim r \to \sim q$ 이므로 $s \to \sim q$

44. $x > 0,\ y > 0$ 일 때, $\left(x+\dfrac{1}{4y}\right)\left(\dfrac{1}{x}+8y\right)$ 의 최솟값을 다음과 같이 구하였다. 이 과정에서 최초로 잘못된 부분과 옳은 답을 구하면?

$$\left(x+\frac{1}{4y}\right)\left(\frac{1}{x}+8y\right) \geq 2\sqrt{\frac{x}{4y}} \times 2\sqrt{\frac{8y}{x}} \ : \text{(가)}$$

$$\left(\because \quad x+\frac{1}{4y} \geq 2\sqrt{x \times \frac{1}{4y}}, \ : \text{(나)}\right.$$

$$\left.\frac{1}{x}+8y \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \times 8y}\right) \ : \text{(다)}$$

따라서 최솟값은 $4\sqrt{2}$: (라)

① (가) , $4\sqrt{2}+3$　② (나) , $2+2\sqrt{2}$　③ (다) , $3+2\sqrt{2}$

④ (라) , $4+3\sqrt{2}$　⑤ (가) , $3+2\sqrt{2}$

해설

$x > 0,\ y > 0$ 일 때

i) $x+\dfrac{1}{4y} \geq 2\sqrt{x \times \dfrac{1}{4y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$

이 때, 등호는 $x = \dfrac{1}{4y}$, 즉 $xy = \dfrac{1}{4}$ 일 때 성립한다.

ii) $\dfrac{1}{x}+8y \geq 2\sqrt{\dfrac{1}{x} \cdot 8y} = 4\sqrt{\dfrac{2y}{x}}$

이 때, 등호는 $\dfrac{1}{x} = 8y$, 즉 $xy = \dfrac{1}{8}$ 일 때 성립한다.

i), ii) 에서 등호가 성립하는 조건이 다르므로 (가)와 같이 나타낼 수 없다.

iii) $\left(x+\dfrac{1}{4y}\right)\left(\dfrac{1}{x}+8y\right)$

$= 3+\dfrac{1}{4xy}+8xy \geq 3+2\sqrt{\dfrac{1}{4xy} \cdot 8xy}$

$= 3+2\sqrt{2}$

$\therefore$ 최솟값은 $3+2\sqrt{2}$

45. 세 양수 a, b, c가 $abc = 1$ 을 만족할 때, 이 사실로부터 추론할 수 있는 것을 보기에서 모두 고르면?

Ⅰ. $a + b + c \geq 3$
Ⅱ. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$
Ⅲ. $ab + bc + ca \geq 3$
Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8$

① Ⅰ, Ⅱ　② Ⅰ, Ⅲ　③ Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅰ, Ⅲ, Ⅳ　⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

$abc = 1$이므로
Ⅰ. $a + b + c \geq 3 \times \sqrt[3]{abc} = 3$
Ⅱ. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2 \times b^2 \times c^2} = 3$
Ⅲ. $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{ab \times bc \times ca} = 3$
Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1)$
$= abc + (ab + bc + ca) + (a + b + c) + 1$
$\geq 1 + 3 + 3 + 1 = 8$

46. x가 실수일 때, $\dfrac{x^2-x+1}{x^4-2x^3+3x^2-2x+2}$ 의 최댓값은?

① $-\dfrac{3}{2}$ ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ 2

해설

$x^4-2x^3+3x^2-2x+2$

$=x^4-2x^3+3x^2-2x+1+1$

$=x^2\left(x^2-2x+3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)+1$

$=x^2\left\{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+3\right\}+1$

$=x^2\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+1\right\}+1$

$=x^2\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right)^2+1$

$=(x^2-x+1)^2+1$

$\therefore$ 준식 $=\dfrac{x^2-x+1}{(x^2-x+1)^2+1}$ 이고

$x^2-x+1=\left(x^2-x+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{3}{4}$

$=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ 이므로

$x^2-x+1=t$로 치환 $t\geq\dfrac{3}{4}$ 하면

준 식 : $\dfrac{t}{t^2+1}=\dfrac{1}{\dfrac{t^2+1}{t}}=\dfrac{1}{t+\dfrac{1}{t}}$

여기서 $t+\dfrac{1}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$

$(\because\ t\geq\dfrac{3}{4})$

따라서 $\dfrac{t^{-1}+1}{t}$ 의 최솟값은 2이고

$\dfrac{t}{t^2+1}$ 의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$ 이다.

47. 다음은 a, b, c, d, x, y, z, w가 실수일 때, 부등식 $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2) \geq (ax+by+cz+dw)^2$이 성립함을 증명하는 과정의 일부이다. ㉠, ㉡ 부분에 들어갈 기호가 순서대로 적당한 것은?

> [증명] 모든 실수 t에 대하여 다음 부등식이 성립한다.
> $(at-x)^2+(bt-y)^2+(ct-z)^2+(dt-w)^2$ $\boxed{㉠}$ 0
> 이것을 t에 관하여 정리하면
> $(a^2+b^2+c^2+d^2)t^2-2(ax+by+cz+dw)t$
> $+(x^2+y^2+z^2+w^2)$ $\boxed{㉠}$ 0
> 따라서 항상 성립하기 위해서는
> $(ax+by+cz+dw)^2-$
> $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)$ $\boxed{㉡}$ $0 \cdots\cdots$ (이하 생략)

① $>$, $<$　② $\geq$, $<$　③ $\leq$, $>$　④ $\leq$, $\geq$　⑤ $\geq$, $\leq$

해설

생략

48. 집합 $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 2m-1\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1 과 3 은 반드시 포함하고 5 와 $2m-1$ 은 포함하지 않는 부분집합의 개수가 32 개일 때 자연수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 2m-1\} \rightarrow\ n(A) = m$ (개)
원소 1 과 3 은 반드시 포함하고 5 와 $2m-1$ 은 반드시 포함하지 않는 부분집합의 개수가 32 개이므로
$2^{m-2-2} = 32$, $m-4=5$
$m = 9$

49. A, B, C 세 학생 중 한 명이 지각을 하였다. 다음은 누가 지각을 했는가에 대한 서로의 주장이다.

A: 내가 지각을 하였다. B: A의 말은 진실이다. C: B는 거짓말을 하였고, B가 지각하였다.

세 사람 중 한 사람만이 진실을 말하고 있다고 할 때, 위의 진술에서 진실을 말하고 있는 학생과 지각을 한 학생을 차례대로 나열하면?

① A, A ② A, B ③ B, C ④ C, A ⑤ C, B

해설

(i) A가 진실을 말한 경우 B는 거짓말을 한 것이었고 A의 말이 진실이 아닌 것이 되어 모순이다.

(ii) B가 진실을 말한 경우 A는 거짓말을 한 것이고, 이는 B의 말과 모순이다.

(iii) C가 진실을 말한 경우 A, B는 모두 거짓말을 하였고, B가 지각하였다.

따라서, 진실을 말한 학생은 C이고, 지각한 학생은 B이다.

50. 실수 x, y 에 대하여 $2x^2+5y^2-4xy-4x-2y$ 의 최솟값을 구하면?

① -8 ② -7 ③ -6 ④ -5 ⑤ -4

해설

$2x^2+5y^2-4xy-4x-2y \geq k$ 로 놓고,
x에 관해 내림차순으로 정리하면
$2x^2-4(1+y)x+5y^2-2y-k \geq 0$
위의 식이 항상 성립하여야 하므로
$$\frac{D}{4}=4(1+y)^2-2(5y^2-2y-k) \leq 0$$
$\therefore 3y^2-6y-k-2 \geq 0$
위의 식이 항상 성립하여야 하므로
$$\frac{D}{4}=9+3(k+2) \leq 0 \quad \therefore k \leq -5$$
따라서, 구하는 $2x^2+5y^2-4xy-4x-2y$의 최솟값은 k의 최댓값 -5이다.