1. 직선 $y = 2x - 3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동 하였더니 다시 $y = 2x - 3$ 의 그래프가 되었다. 이 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은? (단, $a \neq 0$)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

직선 $y = 2x - 3$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y - b = 2(x - a) - 3$
직선의 방정식을 정리하면
$y = 2x - 2a - 3 + b$
원래 직선과 같아졌으므로
$-2a + b - 3 = -3$, $2a = b$,
$\therefore \frac{b}{a} = 2$

2. 두 점 $A(-3,\ -2), B(9,\ 4)$ 에 대하여 $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$ 를 만족하는 점 P 의 자취의 방정식을 구하면?

① $(x+3)^2+(y+5)^2=10$ ② $(x+6)^2+(y+9)^2=20$

③ $(x+2)^2+(y+4)^2=40$ ④ $(x+5)^2+(y+5)^2=60$

⑤ $(x+7)^2+(y+4)^2=80$

해설

조건을 만족하는 점 $P(x, y)$ 라고 하면

$\overline{AP} = \sqrt{(x+3)^2+(y+2)^2}$

$\overline{BP} = \sqrt{(x-9)^2+(y-4)^2}$

이때, $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$ 에서 $2\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$2\sqrt{(x+3)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-9)^2+(y-4)^2}$

양변을 제곱하면

$4\left\{(x+3)^2+(y+2)^2\right\} = (x-9)^2+(y-4)^2$

전개하여 정리하면

$x^2+y^2+14x+8y-15=0$

따라서, 구하는 자취의 방정식은

$(x+7)^2+(y+4)^2=80$

3. 두 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$, $(x+3)^2+(y-4)^2=4$가 외접할 때, r의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$, $(x+3)^2+(y-4)^2=4$의 중심 사이의 거리 $d=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

두 원이 외접하면 $r+2=5$이므로 $r=3$

4. 두 원 $x^2+y^2+2x-4y-2=0$과 $x^2+y^2-2x-1=0$ 의 교점과 원점을 지나는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2+(y+2)^2=5$　　② $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

③ $(x-3)^2+(y+1)^2=10$　　④ $(x+3)^2+(y-1)^2=10$

⑤ $(x-3)^2+(y+2)^2=13$

해설

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2+2x-4y-2+k(x^2+y^2-2x-1)=0$

이 원이 원점을 지나므로

$x=y=0$ 을 대입하면

$-2-k=0$

$\therefore\ k=-2$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2+2x-4y-2-2(x^2+y^2-2x-1)=0$

$-x^2-y^2+6x-4y=0,$

$x^2+y^2-6x+4y=0$

$\therefore\ (x-3)^2+(y+2)^2=13$

5. 두 원 $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2-6y+8=0$ 의 공통외접선의 길이는?

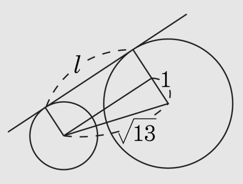
① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{21}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $3\sqrt{6}$

해설

$(x-2)^2+y^2=4,\ x^2+(y-3)^2=1$

$l=\sqrt{(\sqrt{13})^2-1^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\therefore$ 외접선의 길이 : $2\sqrt{3}$



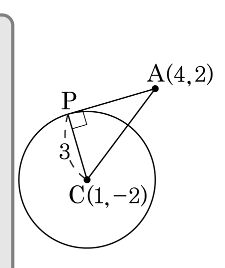
6. 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 이 주어졌을 때, 점 $\mathrm{A}(4,\ 2)$ 에서 그은 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

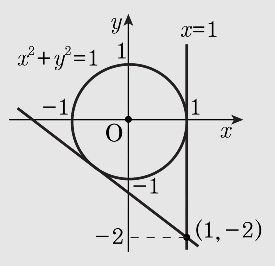
주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면
$(x-1)^2+(y+2)^2=9$ 이다.
다음 그림에서 접선의 길이는
$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CP}^2}$
한편, $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{3^2+4^2}=5$ 이고 $\overline{\mathrm{CP}}=3$
$\therefore \overline{\mathrm{AP}}=4$



7. 원 밖의 점 $(1, -2)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 접선의 방정식을 구하면?

① $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$ 또는 $x = 1$ ② $y = -\frac{2}{3}x - 3$ 또는 $x = 3$
③ $y = -x - \frac{3}{4}$ 또는 $x = -2$ ④ $y = -\frac{9}{5}x - \frac{5}{9}$ 또는 $x = -6$
⑤ $y = -4x - 3$ 또는 $x = 4$

해설



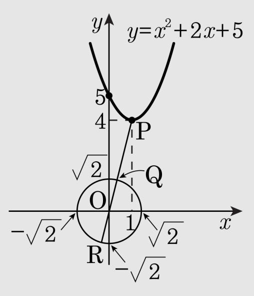
구하는 접선의 기울기를 m 이라고 하면
점 $(1, -2)$ 를 지나는 접선의 방정식은
$y + 2 = m(x - 1)$
$\therefore mx - y - m - 2 = 0$
이 직선이 중심이 $(0, 0)$ 이고
반지름의 길이가 1 인 원에 접하므로
$\frac{|-m-2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1,$
$|m + 2| = \sqrt{m^2 + 1}$
이 식의 양변을 제곱하여 정리하면
$m^2 + 4m + 4 = m^2 + 1, 4m = -3$
$\therefore m = -\frac{3}{4}$
따라서, 구하는 접선의 방정식은
$y + 2 = -\frac{3}{4}(x - 1) \therefore y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$
그런데 다음 그림에서 보듯이 직선 $x = 1$ 도
점 $(1, -2)$ 를 지나고
원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접하는 직선임을 알 수 있다.
그러므로 구하는 접선의 방정식은
$y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$ 또는 $x = 1$

8. 포물선 $y=x^2-2x+5$ 위의 임의의 한 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 라 한다. 점 P 에서 원 $x^2+y^2=2$ 에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값의 차를 구하면?

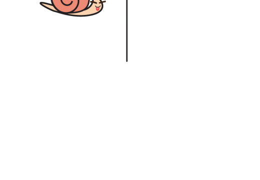
① $2\sqrt{2}$　② 2　③ $\sqrt{2}$　④ 4　⑤ $3\sqrt{2}$

해설

그림과 같이 포물선 위의 한 점 P 에서 원에 이르는 거리의 최솟값은 $\overline{\mathrm{OP}}-$(반지름의 길이) 이고, 최댓값은 $\overline{\mathrm{OP}}+$(반지름의 길이) 가 된다.
따라서, 구하는 최소 길이는 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 이고,
최대 길이는 $\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로
$|\overline{\mathrm{PR}}-\overline{\mathrm{PQ}}|=$ (원의 지름의 길이) $=2\sqrt{2}$



9. 직교좌표계를 사용했을 때, 달팽이의 현재 위치는 $(-10, -10)$ 이다. 이 달팽이는 x 축 방향으로 2 , y 축 방향으로 2 만큼 평행이동하는데 1 분이 걸린다고 한다. 이 달팽이가 원점에 도달하는데 걸린 시간은 몇 분인지 구하여라.



▶ 답: ______ 분

▷ 정답: 5분

해설

달팽이가 x 축 방향으로 2 , y 축 방향으로 2 만큼 평행이동하는데 1 분이 걸린다.
즉, $(-10, -10)$ 에서 $(-8, -8)$ 까지 가는데 1 분, $(-6, -6)$ 까지 가는데 2 분, 같은 식으로 하면 원점에 도달하는데 총 5 분이 걸린다.

10. 점 $(a-4, a-2)$ 를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 다음, $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점과 원점 사이의 거리가 2일 때, 처음 점의 좌표를 (p, q) 라 한다. p^2+q^2 의 값을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$(a-4, a-2) \to (a, a-2)$
(x 축으로 4만큼 평행이동)
$(a, a-2) \to (a-2, a)$
($y=x$ 에 대칭이동)
$(a-2, a)$ 와 원점 사이의 거리는
$\sqrt{(a-2)^2+a^2}=2$
$2a^2-4a+4=4,$
$\therefore a=2$ ($\because a \neq 0$)
처음 점의 좌표 $(a-4, a-2)$ 에 $a=2$ 를 대입하면
구하는 점의 좌표 $(p, q)=(-2, 0)$
$\therefore p^2+q^2=4$

11. 직선 $2x-3y-1=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 후, 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=5$ 의 넓이를 이등분하였다. 이때, a 의 값은?

① 1　② 2　③ $\sqrt{5}$　④ 3　⑤ $2\sqrt{5}$

해설

직선 $2x-3y-1=0$ 을 원점에 대하여
대칭이동하면 $-2x+3y-1=0$
이 직선을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면
$-2y+3x-1=0$
$\therefore 3x-2y-1=0$
이 직선이 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=5$ 의 넓이를
이등분하므로 원의 중심 $(1,a)$ 를 지난다.
즉, $3-2a-1=0, 2a=2$　$\therefore a=1$

12. 직선 $2x+ay+b=0$ 에 대하여 점 $\mathrm{A}(3,2)$ 와 대칭인 점을 $\mathrm{B}(-1,0)$ 이라고 할 때, 상수 a,b 에 대하여 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

두 점 $\mathrm{A}(3,2)$, $\mathrm{B}(-1,0)$ 에 대하여
$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점 $(1,1)$ 이
직선 $2x+ay+b=0$ 위에 있으므로
$2+a+b=0\cdots$㉠
직선 AB 와 직선 $2x+ay+b=0$,
즉 $y=-\frac{2}{a}x-\frac{b}{a}$ 가 수직이므로
$\frac{2-0}{3-(-1)}=\frac{a}{2}$
$\therefore a=1$
이 값을 ㉠에 대입하면 $b=-3$
$\therefore ab=-3$

13. 두 명제 $p \to \sim q$와 $r \to q$가 참일 때, 다음 보기 중 참인 명제는 <u>모두</u> 몇 개인가?

보기

㉠ $q \to \sim p$ ㉡ $q \to r$

㉢ $\sim q \to \sim r$ ㉣ $r \to \sim p$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 없다.

해설

두 명제 $p \to \sim q$와 $r \to q$가 참이므로 각각의 대우인 $q \to \sim p$와 $\sim q \to \sim r$도 참이다. 또, $p \to \sim q$와 $\sim q \to \sim r$로 부터 $p \to \sim r$이 참이고 그 대우 $r \to \sim p$도 참이다. 따라서 보기 중 참인 명제는 ㉠, ㉢, ㉣이다.

14. 다음 보기 중 세 실수 $a,\ b,\ c$ 가 모두 0 이 아니기 위한 필요조건이 아닌 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $abc \neq 0$　　㉡ $a+b+c \neq 0$

㉢ $a^2+b^2+c^2 \neq 0$

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉠, ㉡　⑤ ㉡, ㉢

해설

p가 q이기 위한 필요조건이려면 $q \Rightarrow p$
q : 세 실수 a, b, c가 모두 0이 아니다.
㉠ $q \leftrightarrow abc \neq 0$ $\therefore$ 필요충분조건
㉡ $q \nRightarrow a+b+c \neq 0$ (반례 : $a=-1, b=-1, c=2$), $q \nLeftarrow a+b+c \neq 0$(반례 : $a=0, b=-1, c=2$) $\therefore$ 아무조건도 아니다.
㉢ $q \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \neq 0$, $q \nLeftarrow a^2+b^2+c^2 \neq 0$ (반례 : $a=0$, $b=0$, $c=-1$) $\therefore$ 필요조건

15. 다음 보기 중에서 두 조건 p, q에 대하여 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $p : A \cap B = A,\ q : A \subset B$

㉡ $p : x > 1$ 이고 $y > 1,\ q : x + y > 2$

㉢ $p : x + |x| = 0,\ q : x < 0$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢

④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉡ 충분조건

㉢ 필요조건 $p : x + |x| = 0 \rightarrow x \leq 0$

16. $a+b=9$를 만족하는 양수 a, b에 대하여 $[ab]$의 최댓값을 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지않는 최대의 정수이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 20

해설

산술기하평균의 관계를 이용하면 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

$ab \leq \left(\frac{9}{2}\right)^2$, $ab \leq 20.25$

$\therefore [ab]$ 의 최댓값은 20

17. 두 정점 $\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$, $\mathrm{B}(\sqrt{2},\ 0)$ 가 있다. 조건 $2\overline{\mathrm{PA}}^2 - \overline{\mathrm{PB}}^2 = 9$ 를 만족시키는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 의 자취는 원이다. 이 원의 반지름은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$2\overline{\mathrm{PA}}^2 - \overline{\mathrm{PB}}^2 = 9$

$2\left\{(x+\sqrt{2})^2 + y^2\right\} - \left\{(x-\sqrt{2})^2 + y^2\right\} = 9$

이것을 정리하면, $(x+3\sqrt{2})^2 + y^2 = 25$

점 P 의 자취는 점 $(-3\sqrt{2},\ 0)$ 을 중심으로 하고,

반지름이 5 인 원이다.

18. 집합 $A = \{(a,\ b) \mid a \times b = 9,\ a,\ b$는 자연수$\}$ 일 때, 집합 $n(A)$ 를 바르게 구한 것은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$1 \times 9 = 3 \times 3 = 9 \times 1 = 9$ 이므로 원소나열법으로 나타내면
$A = \{(1,\ 9),\ (3,\ 3),\ (9,\ 1)\}$ 이다.
$\therefore\ n(A) = 3$

19. 자연수 전체의 두 부분집합 $A,\ B$ 가 각각 $A=\{a \mid a\text{는 } 12\text{의 약수}\}$, $B=\{b \mid b\text{는 } 16\text{의 약수}\}$ 일 때, $(B-A)\cup X=X,\ B\cap X=X$를 모두 만족하는 집합 X의 개수는?

① 8 개　② 10 개　③ 12 개　④ 14 개　⑤ 16 개

해설

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$ 이므로 $B-A=\{8,\ 16\}$

또 $(B-A)\cup X=X$ 에서

$(B-A)\subset X,\ B\cap X=X$ 에서 $X\subset B$ 이므로 $(B-A)\subset X\subset B$

$\therefore\ \{8,\ 16\}\subset X\subset\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$

즉, 집합 X는 8, 16 을 반드시 원소로 갖는 집합 B 의 부분집합이므로 구하는 집합 X 의 개수는 $2^3=8$ (개)

20. 집합 $A = \{x \mid x\text{는 } n\text{보다 작은 자연수}\}$ 이고 집합 B 는 A 의 모든 부분집합을 원소로 하는 집합이다. 집합 B 의 부분집합의 개수가 16 일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$2^k = 16 = 2^4 \quad \therefore k = 4$

B 의 원소의 개수가 4 개 이므로, 집합 A 의 부분집합의 수는 4 개이다.

$2^{(n\text{보다 작은 자연수 개수})} = 2^{n-1} = 4 = 2^2 \quad \therefore n = 3$

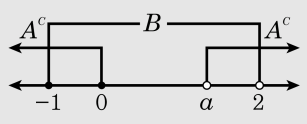
21. 실수 전체의 집합R의 두 부분집합 $A = \{x|0 < x \leq a\}$, $B = \{x|-1 \leq x < 2\}$ 가 $A^c \cup B = R$를 만족할 때, a의 값의 범위를 구하면? (단, $A \neq \varnothing$)

① $0 \leq a < 2$ ② $0 < a \leq 2$ ③ $0 \leq a \leq 2$

④ $0 < a < 2$ ⑤ $-1 \leq a < 5$

해설

$A \neq \varnothing$이므로, $a > 0$ 또 $A^c = \{x|x \leq 0$ 또는 $x > a\}$



위의 그림에서 $A^c \cup B = R$가 되려면, $0 < a < 2$

해설

$A^c \cup B = R \leftrightarrow A \subset B$ 임을 이용하여 구할 수 있다.

22. 두 자리 자연수 중 k의 배수인 것 전체의 집합을 $A_k(k = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$ 라 할 때, 집합 $A_2 \cap (A_3 \cup A_4)$ 의 원소의 개수는?

① 26　　② 27　　③ 28　　④ 29　　⑤ 30

해설

$A_2 \cap (A_3 \cup A_4) = (A_2 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_4) = A_6 \cup A_4$

$10 \le 6n < 100$ 에서 $2 \le n \le 16 \therefore\ n(A_6) = 15$

$10 \le 4n < 100$ 에서 $3 \le n < 25 \therefore\ n(A_4) = 22$

$10 \le 12n < 100$ 에서 $1 \le n \le 8 \therefore\ n(A_{12}) = 8$

그러므로 $n(A_6 \cup A_4) = 15 + 22 - 8 = 29$

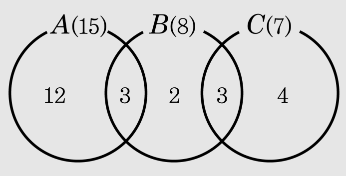
23. 세 집합 A, B, C에 대하여 $n(A) = 15$, $n(B) = 8$, $n(C) = 7$, $n(A \cap B) = 3$, $n(B \cup C) = 12$, $A \cap C = \varnothing$일 때, $n(A \cup B \cup C)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore\ n(A \cup B \cup C) = 24$

24. 다음은 '자연수 n 에 대하여, n^2 이 3 의 배수이면 n 도 3 의 배수이다.' 라는 명제를 대우를 이용하여 증명하는 과정이다. (가), (나), (다), (라), (마)에 들어갈 알맞은 식 또는 수끼리 짝지은 것을 고르면?

대우는 '자연수 n 에 대하여, n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 3 의 배수가 아니다.' 이다. 3 의 배수가 아닌 자연수 n 은 3 으로 나누면 나머지가 1 또는 2 이므로
$n = ($ 가 $)$ 또는 $n = ($ 나 $)$ (단, k는 음이 아닌 정수)
로 가정할 수 있다.
(ⅰ) $n = ($ 가 $)$ 일 때
$n^2 = 3($ 다 $) + 1$
(ⅱ) $n = ($ 나 $)$ 일 때
$n^2 = 3($ 라 $) + 1$
이 되어 n^2 은 3으로 나누면 나머지가 (마) 인 자연수가 된다.
(ⅰ), (ⅱ) 에 의하여 n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 3 의 배수가 아니다. 그러므로 주어진 명제는 참인 명제이다.

① $3k-2,\ 3k-1,\ (3k^2+2k),\ (3k^2+4k+1),\ 2$
② $3k-1,\ 3k-2,\ (3k^2-4k+1),\ (3k^2-2k),\ 1$
③ $3k+2,\ 3k+1,\ (3k^2+2k),\ (3k^2+4k+1),\ 2$
④ $3k-2,\ 3k-1,\ (3k^2-4k+1),\ (3k^2-2k),\ 1$
⑤ $3k+1,\ 3k+2,\ (3k^2+2k),\ (3k^2+4k+1),\ 1$

해설

3 의 배수가 아닌 수들은 3 으로 나눠서 1 또는 2 가 남아야 하므로 $3k+1$ 또는 $3k+2$ 이어야 한다.
제곱을 하여 계산하면 (다), (라)는 각각 $(3k^2+2k)$, $(3k^2+4k+1)$ 가 되고, 나머지가 1 인 자연수가 된다.
따라서 주어진 명제는 참인 명제이다.

25. 집합 $A = \{\varnothing,\ 2,\ 4,\ \{2,\ 4\}\}$일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면?

① $\varnothing \in A$　② $\varnothing \subset A$　③ $\{2,\ 4\} \subset A$
④ $\{2,\ 4\} \notin A$　⑤ $\{\{2,\ 4\}\} \not\subset A$

해설

④ $\{2,\ 4\} \in A$
⑤ $\{\{2,\ 4\}\} \subset A$