

1. 직선 $y = 2x - 3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동 하였더니 다시 $y = 2x - 3$ 의 그래프가 되었다. 이때, $\frac{b}{a}$ 의 값은? (단, $a \neq 0$)

① $\frac{1}{2}$

② 1

③ $\frac{3}{2}$

④ 2

⑤ $\frac{5}{2}$

해설

직선 $y = 2x - 3$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한
직선의 방정식은

$$y - b = 2(x - a) - 3$$

직선의 방정식을 정리하면

$$y = 2x - 2a - 3 + b$$

원래 직선과 같아졌으므로

$$-2a + b - 3 = -3, 2a = b,$$

$$\therefore \frac{b}{a} = 2$$

2. 두 점 A(-3, -2), B(9, 4) 에 대하여 $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$ 를 만족하는 점 P 의 자취의 방정식을 구하면?

① $(x+3)^2 + (y+5)^2 = 10$

② $(x+6)^2 + (y+9)^2 = 20$

③ $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 40$

④ $(x+5)^2 + (y+5)^2 = 60$

⑤ $(x+7)^2 + (y+4)^2 = 80$

해설

조건을 만족하는 점 P (x,y) 라고 하면

$$\overline{AP} = \sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(x-9)^2 + (y-4)^2}$$

이때, $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$ 에서 $2\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$$2\sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-9)^2 + (y-4)^2}$$

양변을 제곱하면

$$4\{(x+3)^2 + (y+2)^2\} = (x-9)^2 + (y-4)^2$$

전개하여 정리하면

$$x^2 + y^2 + 14x + 8y - 15 = 0$$

따라서, 구하는 자취의 방정식은

$$(x+7)^2 + (y+4)^2 = 80$$

3. 두 원 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ 가 외접할 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 원 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ 의 중심 사이의 거리 $d = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

두 원이 외접하면 $r + 2 = 5$ 이므로 $r = 3$

4. 두 원 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 2 = 0$ 과 $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ 의 교점과 원점을 지나는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$

② $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

③ $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 10$

④ $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 10$

⑤ $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 13$

해설

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 2 + k(x^2 + y^2 - 2x - 1) = 0$$

이 원이 원점을 지나므로

$x = y = 0$ 을 대입하면

$$-2 - k = 0$$

$$\therefore k = -2$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 2 - 2(x^2 + y^2 - 2x - 1) = 0$$

$$-x^2 - y^2 + 6x - 4y = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$$

$$\therefore (x-3)^2 + (y+2)^2 = 13$$

5. 두 원 $x^2 + y^2 - 4x = 0$, $x^2 + y^2 - 6y + 8 = 0$ 의 공통외접선의 길이는?

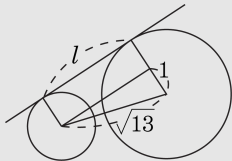
- ① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{21}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $3\sqrt{6}$

해설

$$(x-2)^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$l = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - 1^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

∴ 외접선의 길이 : $2\sqrt{3}$



6. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 이 주어졌을 때, 점 $A(4, 2)$ 에서 그은 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

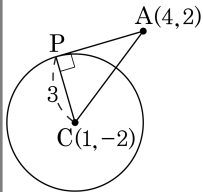
주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면
 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ 이다.

다음 그림에서 접선의 길이는

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2}$$

한편, $\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이고 $\overline{CP} = 3$

$$\therefore \overline{AP} = 4$$



7. 원 밖의 점 $(1, -2)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 접선의 방정식을 구하면?

① $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$ 또는 $x = 1$

② $y = -\frac{2}{3}x - 3$ 또는 $x = 3$

③ $y = -x - \frac{3}{4}$ 또는 $x = -2$

④ $y = -\frac{9}{5}x - \frac{5}{9}$ 또는 $x = -6$

⑤ $y = -4x - 3$ 또는 $x = 4$

해설

구하는 접선의 기울기를 m 이라고 하면
점 $(1, -2)$ 를 지나는 접선의 방정식은
 $y + 2 = m(x - 1)$

$$\therefore mx - y - m - 2 = 0$$

이 직선이 중심이 $(0, 0)$ 이고

반지름의 길이가 1 인 원에 접하므로

$$\frac{|-m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 1,$$

$$|m+2| = \sqrt{m^2+1}$$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$m^2 + 4m + 4 = m^2 + 1, 4m = -3$$

$$\therefore m = -\frac{3}{4}$$

따라서, 구하는 접선의 방정식은

$$y + 2 = -\frac{3}{4}(x - 1) \therefore y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$

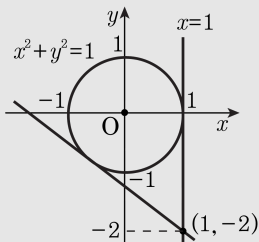
그런데 다음 그림에서 보듯이 직선 $x = 1$ 도

점 $(1, -2)$ 를 지나고

원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접하는 직선임을 알 수 있다.

그러므로 구하는 접선의 방정식은

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \text{ 또는 } x = 1$$



8. 포물선 $y = x^2 - 2x + 5$ 위의 임의의 한 점을 $P(x, y)$ 라 한다. 점 P 에서 원 $x^2 + y^2 = 2$ 에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값의 차를 구하면?

① $2\sqrt{2}$

② 2

③ $\sqrt{2}$

④ 4

⑤ $3\sqrt{2}$

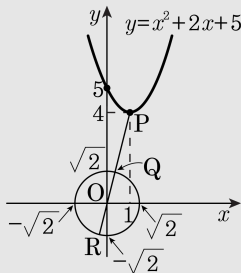
해설

그림과 같이 포물선 위의 한 점 P 에서 원에 이르는 거리의 최솟값은 $\overline{OP}$ -(반지름의 길이)이고, 최댓값은 $\overline{OP}$ +(반지름의 길이)가 된다.

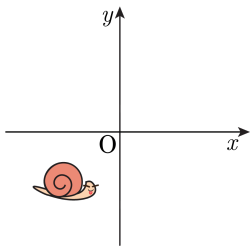
따라서, 구하는 최소 길이는 $\overline{PQ}$ 이고,

최대 길이는 $\overline{PR}$ 이므로

$$|\overline{PR} - \overline{PQ}| = (\text{원의 지름의 길이}) = 2\sqrt{2}$$



9. 직교좌표계를 사용했을 때, 달팽이의 현재 위치는 $(-10, -10)$ 이다. 이 달팽이는 x 축 방향으로 2, y 축 방향으로 2 만큼 평행이동하는데 1 분이 걸린다고 한다. 이 달팽이가 원점에 도달하는데 걸린 시간은 몇 분인지 구하여라.



▶ 답: 분

▷ 정답: 5 분

해설

달팽이가 x 축 방향으로 2, y 축 방향으로 2 만큼 평행이동하는데 1 분이 걸린다.

즉, $(-10, -10)$ 에서 $(-8, -8)$ 까지 가는데 1 분,
 $(-6, -6)$ 까지 가는데 2 분, 같은 식으로 하면
원점에 도달하는데 총 5 분이 걸린다.

10. 점 $(a-4, a-2)$ 를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 다음, $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점과 원점 사이의 거리가 2일 때, 처음 점의 좌표를 (p, q) 라 한다. $p^2 + q^2$ 의 값을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$(a-4, a-2) \rightarrow (a, a-2)$$

(x 축으로 4만큼 평행이동)

$$(a, a-2) \rightarrow (a-2, a)$$

($y=x$ 에 대칭이동)

$(a-2, a)$ 와 원점 사이의 거리는

$$\sqrt{(a-2)^2 + a^2} = 2$$

$$2a^2 - 4a + 4 = 4,$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a \neq 0)$$

처음 점의 좌표 $(a-4, a-2)$ 에 $a=2$ 를 대입하면

구하는 점의 좌표 $(p, q) = (-2, 0)$

$$\therefore p^2 + q^2 = 4$$

11. 직선 $2x - 3y - 1 = 0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 후, 다시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 원 $(x - 1)^2 + (y - a)^2 = 5$ 의 넓이를 이등분하였다. 이때, a 의 값은?

① 1

② 2

③ $\sqrt{5}$

④ 3

⑤ $2\sqrt{5}$

해설

직선 $2x - 3y - 1 = 0$ 을 원점에 대하여

대칭이동하면 $-2x + 3y - 1 = 0$

이 직선을 다시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하면

$$-2y + 3x - 1 = 0$$

$$\therefore 3x - 2y - 1 = 0$$

이 직선이 원 $(x - 1)^2 + (y - a)^2 = 5$ 의 넓이를

이등분하므로 원의 중심 $(1, a)$ 를 지난다.

$$\text{즉, } 3 - 2a - 1 = 0, 2a = 2 \quad \therefore a = 1$$

12. 직선 $2x + ay + b = 0$ 에 대하여 점 A (3,2) 와 대칭인 점을 B (-1,0) 이라고 할 때, 상수 a, b 에 대하여 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

두 점 A (3,2) , B (-1,0) 에 대하여

$\overline{AB}$ 의 중점 (1,1) 이

직선 $2x + ay + b = 0$ 위에 있으므로

$$2 + a + b = 0 \cdots \textcircled{1}$$

직선 AB 와 직선 $2x + ay + b = 0$,

즉 $y = -\frac{2}{a}x - \frac{b}{a}$ 가 수직이므로

$$\frac{2-0}{3-(-1)} = \frac{a}{2}$$

$$\therefore a = 1$$

이 값을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b = -3$

$$\therefore ab = -3$$

13. 두 명제 $p \rightarrow \sim q$ 와 $r \rightarrow q$ 가 참일 때, 다음 보기 중 참인 명제는 모두 몇 개인가?

보기

㉠ $q \rightarrow \sim p$

㉡ $q \rightarrow r$

㉢ $\sim q \rightarrow \sim r$

㉣ $r \rightarrow \sim p$

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 없다.

해설

두 명제 $p \rightarrow \sim q$ 와 $r \rightarrow q$ 가 참이므로 각각의 대우인 $q \rightarrow \sim p$ 와 $\sim q \rightarrow \sim r$ 도 참이다. 또, $p \rightarrow \sim q$ 와 $\sim q \rightarrow \sim r$ 로부터 $p \rightarrow \sim r$ 이 참이고 그 대우 $r \rightarrow \sim p$ 도 참이다. 따라서 보기 중 참인 명제는 ㉠, ㉢, ㉣이다.

14. 다음 보기 중 세 실수 a, b, c 가 모두 0 이 아니기 위한 필요조건이 아닌 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $abc \neq 0$

㉡ $a + b + c \neq 0$

㉢ $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉡, ㉢

해설

p 가 q 이기 위한 필요조건이라면 $q \Rightarrow p$

q : 세 실수 a, b, c 가 모두 0이 아니다.

㉠ $q \leftrightarrow abc \neq 0 \therefore$ 필요충분조건

㉡ $q \not\Rightarrow a + b + c \neq 0$ (반례 : $a = -1, b = -1, c = 2$),
 $q \not\Leftarrow a + b + c \neq 0$ (반례 : $a = 0, b = -1, c = 2$) $\therefore$ 아무조건도 아니다.

㉢ $q \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \neq 0, q \not\Leftarrow a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ (반례 : $a = 0, b = 0, c = -1$) $\therefore$ 필요조건

15. 다음 보기 중에서 두 조건 p, q 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ $p : A \cap B = A, q : A \subset B$
㉡ $p : x > 1$ 이고 $y > 1, q : x + y > 2$
㉢ $p : x + |x| = 0, q : x < 0$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉡ 충분조건

㉢ 필요조건 $p : x + |x| = 0 \rightarrow x \leq 0$

16. $a + b = 9$ 를 만족하는 양수 a, b 에 대하여 $[ab]$ 의 최댓값을 구하여라.
(단, $[x]$ 는 x 를 넘지않는 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

산술기하평균의 관계를 이용하면 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$$ab \leq \left(\frac{9}{2}\right)^2, ab \leq 20.25$$

$\therefore [ab]$ 의 최댓값은 20

17. 두 점 $A(-\sqrt{2}, 0)$, $B(\sqrt{2}, 0)$ 가 있다. 조건 $2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$ 를 만족시키는 점 $P(x, y)$ 의 자취는 원이다. 이 원의 반지름은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$$

$$2\{(x + \sqrt{2})^2 + y^2\} - \{(x - \sqrt{2})^2 + y^2\} = 9$$

$$\text{이것을 정리하면, } (x + 3\sqrt{2})^2 + y^2 = 25$$

점 P 의 자취는 점 $(-3\sqrt{2}, 0)$ 을 중심으로 하고,
반지름이 5 인 원이다.

18. 집합 $A = \{(a, b) \mid a \times b = 9, a, b \text{는 자연수}\}$ 일 때, 집합 $n(A)$ 를 바르게 구한 것은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$1 \times 9 = 3 \times 3 = 9 \times 1 = 9$ 이므로 원소나열법으로 나타내면
 $A = \{(1, 9), (3, 3), (9, 1)\}$ 이다.

$$\therefore n(A) = 3$$

19. 자연수 전체의 두 부분집합 A, B 가 각각 $A = \{a \mid a \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$, $B = \{b \mid b \text{는 } 16 \text{의 약수}\}$ 일 때, $(B - A) \cup X = X$, $B \cap X = X$ 를 모두 만족하는 집합 X 의 개수는?

- ① 8 개 ② 10 개 ③ 12 개 ④ 14 개 ⑤ 16 개

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ 이므로 $B - A = \{8, 16\}$

또 $(B - A) \cup X = X$ 에서

$(B - A) \subset X$, $B \cap X = X$ 에서 $X \subset B$ 이므로 $(B - A) \subset X \subset B$

$\therefore \{8, 16\} \subset X \subset \{1, 2, 4, 8, 16\}$

즉, 집합 X 는 8, 16 을 반드시 원소로 갖는 집합 B 의 부분집합
이므로 구하는 집합 X 의 개수는 $2^3 = 8$ (개)

20. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } n \text{보다 작은 자연수}\}$ 이고 집합 B 는 A 의 모든 부분 집합을 원소로 하는 집합이다. 집합 B 의 부분집합의 개수가 16 일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$2^k = 16 = 2^4 \quad \therefore k = 4$$

B 의 원소의 개수가 4 개 이므로, 집합 A 의 부분집합의 수는 4 개이다.

$$2^{(n \text{보다 작은 자연수 개수})} = 2^{n-1} = 4 = 2^2 \quad \therefore n = 3$$

21. 실수 전체의 집합 R 의 두 부분집합 $A = \{x | 0 < x \leq a\}$, $B = \{x | -1 \leq x < 2\}$ 가 $A^c \cup B = R$ 를 만족할 때, a 의 값의 범위를 구하면? (단, $A \neq \emptyset$)

① $0 \leq a < 2$

② $0 < a \leq 2$

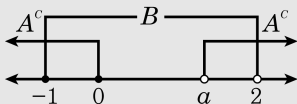
③ $0 \leq a \leq 2$

④ $0 < a < 2$

⑤ $-1 \leq a < 5$

해설

$A \neq \emptyset$ 이므로, $a > 0$ 또 $A^c = \{x | x \leq 0 \text{ 또는 } x > a\}$



위의 그림에서 $A^c \cup B = R$ 가 되려면, $0 < a < 2$

해설

$A^c \cup B = R \Leftrightarrow A \subset B$ 임을 이용하여 구할 수 있다.

22. 두 자리 자연수 중 k 의 배수인 것 전체의 집합을 $A_k(k = 1, 2, 3, \dots)$ 라 할 때, 집합 $A_2 \cap (A_3 \cup A_4)$ 의 원소의 개수는?

① 26

② 27

③ 28

④ 29

⑤ 30

해설

$$A_2 \cap (A_3 \cup A_4) = (A_2 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_4) = A_6 \cup A_4$$

$$10 \leq 6n < 100 \text{ 에서 } 2 \leq n \leq 16 \therefore n(A_6) = 15$$

$$10 \leq 4n < 100 \text{ 에서 } 3 \leq n < 25 \therefore n(A_4) = 22$$

$$10 \leq 12n < 100 \text{ 에서 } 1 \leq n \leq 8 \therefore n(A_{12}) = 8$$

$$\text{그러므로 } n(A_6 \cup A_4) = 15 + 22 - 8 = 29$$

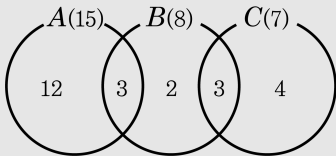
23. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = 15$, $n(B) = 8$, $n(C) = 7$, $n(A \cap B) = 3$, $n(B \cup C) = 12$, $A \cap C = \emptyset$ 일 때, $n(A \cup B \cup C)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$$\therefore n(A \cup B \cup C) = 24$$

24. 다음은 ‘자연수 n 에 대하여, n^2 이 3 의 배수이면 n 도 3 의 배수이다.’ 라는 명제를 대우를 이용하여 증명하는 과정이다. (가), (나), (다), (라), (마) 에 들어갈 알맞은 식 또는 수끼리 짝지은 것을 고르면?

대우는 ‘자연수 n 에 대하여, n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 3 의 배수가 아니다.’ 이다. 3 의 배수가 아닌 자연수 n 은 3 으로 나누면 나머지가 1 또는 2 이므로

$n = (가)$ 또는 $n = (나)$ (단, k 는 음이 아닌 정수) 로 가정할 수 있다.

(i) $n = (가)$ 일 때

$$n^2 = 3(다) + 1$$

(ii) $n = (나)$ 일 때

$$n^2 = 3(라) + 1$$

이 되어 n^2 은 3 으로 나누면 나머지가 (마) 인 자연수가 된다.

(i), (ii) 에 의하여 n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 3 의 배수가 아니다. 그러므로 주어진 명제는 참인 명제이다.

- ① $3k - 2, 3k - 1, (3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1), 2$
- ② $3k - 1, 3k - 2, (3k^2 - 4k + 1), (3k^2 - 2k), 1$
- ③ $3k + 2, 3k + 1, (3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1), 2$
- ④ $3k - 2, 3k - 1, (3k^2 - 4k + 1), (3k^2 - 2k), 1$
- ⑤ $3k + 1, 3k + 2, (3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1), 1$

해설

3 의 배수가 아닌 수들은 3 으로 나뉘서 1 또는 2 가 남아야 하므로 $3k + 1$ 또는 $3k + 2$ 이어야 한다.

제곱을 하여 계산하면 (다), (라) 는 각각 $(3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1)$ 가 되고, 나머지가 1 인 자연수가 된다.

따라서 주어진 명제는 참인 명제이다.

25. 집합 $A = \{\emptyset, 2, 4, \{2, 4\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① $\emptyset \in A$

② $\emptyset \subset A$

③ $\{2, 4\} \subset A$

④ $\{2, 4\} \notin A$

⑤ $\{\{2, 4\}\} \not\subset A$

해설

④ $\{2, 4\} \in A$

⑤ $\{\{2, 4\}\} \subset A$