1. 다음 보기의 복소수 중 실수인 것의 개수는?

보기

$2i,\quad 1+\sqrt{-4},\quad 3+4i,\quad 9,\quad i^2+1$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$a+bi$ 에서 $b=0$ 인 경우, 즉 허수 부분이 0이면 실수이다.
$2i$ 의 허수 부분은 2, $1+\sqrt{-4}=1+2i$ 에서 허수 부분은 2이고,
$3+4i$ 의 허수 부분은 4이다.
9와 $i^2+1=-1+1=0$ 의 허수 부분은 0이다.
따라서 실수인 것은 9와 i^2+1 로 두 개다.

2. 등식 $\frac{x}{1+2i}+\frac{y}{1-2i}=1-\frac{i}{5}$ 를 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $16xy$ 의 값은?

① 97　② 98　③ 99　④ 100　⑤ 101

해설

(좌변) $=\frac{x}{1+2i}+\frac{y}{1-2i}$

$=\frac{x(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+\frac{y(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)}$

$\frac{(x+y)+2(y-x)i}{5}$ 이므로

$\frac{x+y}{5}+\frac{2(y-x)i}{5}=1-\frac{i}{5}$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\frac{x+y}{5}=1$, $\frac{2(y-x)}{5}=-\frac{1}{5}$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=\frac{11}{4},\ y=\frac{9}{4}$

$\therefore\ 16xy=16\cdot\frac{11}{4}\cdot\frac{9}{4}=99$

3. $\dfrac{2+3i}{3-i}$ 를 계산하면?

① $\dfrac{3}{8}+\dfrac{13}{8}i$　② $\dfrac{3}{10}+\dfrac{11}{10}i$　③ $\dfrac{3}{10}-\dfrac{11}{10}i$
④ $\dfrac{3}{8}-\dfrac{13}{8}i$　⑤ $\dfrac{4}{9}+\dfrac{11}{9}i$

해설

$$\frac{2+3i}{3-i}=\frac{(2+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{3}{10}+\frac{11}{10}i$$

4. $\sqrt{(-1)^2}+i^2-\frac{1}{i}$ 를 계산하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ $-i$ ⑤ i

해설

(준식)$=1-1+i=i$

5. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a \geq 0,\ b < 0$　② $a > 0,\ b > 0$　③ $a \geq 0,\ b > 0$
④ $a < 0,\ b < 0$　⑤ $a \leq 0,\ b < 0$

해설
$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 가 성립할 조건은 $b < 0$ 이고 $a \geq 0$ 일 때이다.

6. $i^2 = -1$이라 할 때, 다음 중 제곱하여 음수가 되는 수의 개수는 ?

$-2,\quad -\sqrt{2},\quad 2i,\quad -2i,$ $3i,\quad -3i,\quad 1-i,\quad 1+i$

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$i^2 = -1$이므로 제곱해서 음수가 되는 수는 순허수, 즉 $ai(a \neq 0)$의 꼴이 되어야 한다.

$\therefore\ 2i,\ -2i,\ 3i,\ -3i$ 4개,

$2, -\sqrt{2}$는 실수이므로

$(\text{실수})^2 \geq 0$, $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$가 된다.

7. 등식 $3x - 2yi = (2+i)^2$ 이 성립하는 x, y에 대하여 두 수를 곱하면?

① -2　② -1　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$3x - 2yi = (2+i)^2 = 3 + 4i$

$x = 1$,　$y = -2$

$\therefore$ $xy = -2$

8. $x = 1 + 2i$, $y = \dfrac{1+2i}{1-i}$, $z = \dfrac{1-2i}{1-i}$ 일 때,$xy + xz$ 의 값을 구하면?

① $-1 + 3i$　② $-1 - 2i$　③ $-1 + 2i$
④ $-1 - i$　⑤ $-1 + i$

해설

$x = 1 + 2i,\ y = \dfrac{1+2i}{1-i},\ z = \dfrac{1-2i}{1-i}$

$$\begin{aligned} \therefore\ xy + xz &= \frac{(1+2i)^2}{1-i} + \frac{(1-2i)(1+2i)}{1-i} \\ &= \frac{-3+4i+5}{1-i} \\ &= \frac{2+4i}{1-i} \\ &= -1 + 3i \end{aligned}$$

9. $z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + i$ 일 때, $z_1^3 + z_2^3$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $4 - 2i$ ② 0 ③ 20

④ $-2 + 4i$ ⑤ -4

해설

$z_1 + z_2 = 2,\ z_1 z_2 = 2$

$$\begin{aligned} z_1^3 + z_2^3 &= (z_1 + z_2)^3 - 3z_1 z_2 (z_1 + z_2) \\ &= 8 - 12 \\ &= -4 \end{aligned}$$

10. $x=2009,\ y=7440$ 일 때, $\dfrac{x+yi}{y-xi}+\dfrac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ -1 ④ i ⑤ $-i$

해설

주어진 식을 정리하면

$\dfrac{x+yi}{y-xi}+\dfrac{y-xi}{x+yi}$

$=\dfrac{(x+yi)^2+(y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)}$

$=\dfrac{x^2+2xyi-y^2+y^2-2xyi-x^2}{xy+y^2i-x^2i+xy}=0$

따라서 구하는 값은 0

11. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3)\cdot(-3)} = \sqrt{9} = 3$
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5\times(-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\dfrac{2}{-6}} = \sqrt{-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

① Ⅰ, Ⅱ　② Ⅰ, Ⅲ　③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅱ, Ⅳ　⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$
∴ 옳지 않다.
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$
∴ 옳다.
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\dfrac{2}{6}}\cdot\dfrac{i}{i^2} = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
∴ 옳지 않다.
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$
∴ 옳다.

12. $\sqrt{-x^2(x^2-1)^2}$ 이 실수가 되는 서로 다른 실수 x들의 총합은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{-x^2(x^2-1)^2} &= \sqrt{x^2(x^2-1)^2}i \\ &= \sqrt{x^2}\sqrt{(x^2-1)^2}i \\ &= |x| \cdot |x^2-1|i \\ &= |x| \cdot |x+1||x-1|i\end{aligned}$$

그러므로 $x = 0,\ 1,\ -1$일 때 총합은 0이 된다.

13. 복소수 $(1+i)x^2-(2+i)x-3-2i$를 제곱하면 음의 실수가 된다고 할 때, 실수 x의 값은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

(준식)$=x^2-2x-3+(x^2-x-2)i$
이것을 제곱해서 음의 실수가 되려면 순허수이어야 하므로
$x^2-2x-3=0\cdots$㉠, $x^2-x-2\neq 0\cdots$㉡
㉠에서 $x=3,\ x=-1$
이 중에서 ㉡를 만족하는 것은 $\therefore\ x=3$

14. 복소수 $(1+i)x^2 + 2(2+i)x + 3 - 3i$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 x의 값은?
(단, $i^2 = -1$)

① -1　② 1　③ -3　④ 3　⑤ 7

해설

$(x^2+4x+3)+(x^2+2x-3)i$가 순허수이어야 하므로
$x^2+4x+3=0,\ x^2+2x-3 \neq 0$
$(x+3)(x+1)=0,\ x=-1,\ x=-3$
$(x+3)(x-1) \neq 0,\ x \neq 1,\ x \neq -3$
$\therefore\ x=-1$

15. 다음 중 옳은 것은?

① $(1+\sqrt{-1})^3 = 2i+4$

② $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} = 2i$

③ $(-\sqrt{-3})^2 = 3$

④ $(\sqrt{-5})^3 = 5\sqrt{5}i$

⑤ $\sqrt{-3}\sqrt{-9} = -3\sqrt{3}$

해설

① $-2+2i$

② $-2i$

③ -3

④ $-5\sqrt{5}i$

16. $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$일 때, $f\left(\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2\right)+f\left(\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f\left(\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2\right)+f\left(\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$

$=f(i^2)+f((-i)^2)$

$=f(-1)+f(-1)$

$=0$

17. 임의의 자연수 m, n에 대하여 $i^{3m} + i^{3n+1}$ 이 나타낼 수 있는 서로 다른 복소수는 모두 몇 개 인가? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 4 개　　② 6 개　　③ 8 개　　④ 9 개　　⑤ 10 개

해설

i) $i^{3m} = (-i)^m \Rightarrow -i, -1, i, 1$

ii) $i^{3n+1} = (-i)^n \times i \Rightarrow 1, -i, -1, i$

∴ i+ ii 를 더해서 나올 수 있는 수는

$(0, 2, 1-i, 1+i, -1-i, -1+i, 2i, -2i, -2)$ 의 9가지 이다.

18. 복소수 z 와 그의 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① $z+\bar{z}$ 는 실수이다. ② $z=\bar{z}$ 이면 z 는 실수이다.

③ $z\bar{z}=1$ 이면 $z^2=1$ 이다. ④ $z\bar{z}=0$ 이면 $z=0$ 이다.

⑤ $z\bar{z}$ 는 실수이다.

해설

복소수 z 와 그의 켤레복소수를 각각
$z=a+bi,\ \bar{z}=a-bi\ (a, b$ 는 실수) 라 하면

① $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (참)

② $z=\bar{z} \Leftrightarrow\ a+bi=a-bi$
$\Leftrightarrow\ 2bi=0$
$\Leftrightarrow\ b=0$(참)

③ $z\bar{z}=a^2+b^2=1 \Rightarrow z^2=a^2-b^2+2abi \neq 1$ (거짓)
(반례) $a=0,\ b=1$ 일 때, $z^2=-1$

④ $z\bar{z}=a^2+b^2=0\ \Leftrightarrow\ a=0,\ b=0$ (참)

⑤ $z\bar{z}=a^2+b^2$ (참)

19. 등식 $x(3+4i)+\overline{y(1+i)}\ =5+2i$를 만족하는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z의 켤레복소수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x(3+4i)+\overline{y(1+i)}$
$=3x+4xi+y-yi$
$=(3x+y)+(4x-y)i$
$=5+2i$
$\therefore\ 3x+y=5,\ 4x-y=2$
$x=1,\ y=2$
$\therefore\ x+y=3$

20. 다음을 계산하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3 + 3i$

해설

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$
$$= \sqrt{3 \cdot (-3)} - \sqrt{(-3) \cdot (-3)} + \sqrt{\frac{-18}{2}} - \sqrt{\frac{18}{-2}}$$
$$= \sqrt{-9} - \sqrt{9} + \sqrt{-9} - \sqrt{-9}$$
$$= -\sqrt{9} + \sqrt{-9}$$
$$= -3 + 3i$$

21. $i(x+i)^3$ 이 실수일 때, 실수 x 의 값으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 0 ② $\sqrt{3}$ ③ $-\sqrt{3}$ ④ 1 ⑤ -1

해설

$$i(x+i)^3 = i(x^3+3x^2i-3x-i)$$
$$= (-3x^2+1)+(x^3-3x)i$$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$\therefore\ x^3-3x=0$

$x(x^2-3)=0$

$\therefore\ x=0,\ \pm\sqrt{3}$

22. 복소수 α, β 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

㉠ $\alpha+\overline{\alpha}$ 는 실수이다.

㉡ $\alpha-\overline{\alpha}$ 는 허수이다.

㉢ α^2 이 실수이면 α 도 실수이다.

㉣ $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ 이고 $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$ 이다.

① ㉠, ㉡　　② ㉠, ㉢　　③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉣　　⑤ ㉡, ㉣

해설

$\alpha=a+bi,\ \beta=c+di\ (a,\ b,\ c,\ d$ 는 실수$)$라 하면

㉠ $\alpha+\overline{\alpha}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (실수)

$\therefore$ 참

㉡ α 가 실수이면 $\alpha=\overline{\alpha}$ 이므로 $\alpha-\overline{\alpha}=0$ 이다.
따라서 $\alpha-\overline{\alpha}$ 가 반드시 허수인 것은 아니다.

$\therefore$ 거짓

㉢ $i^2=-1$ 은 실수이지만 i 는 순허수이다.

$\therefore$ 거짓

㉣
$$\begin{aligned}\overline{\alpha+\beta}&=\overline{(a+c)+(b+d)i}\\&=(a+c)-(b+d)i\\&=(a-bi)+(c-di)\\&=\overline{\alpha}+\overline{\beta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha\beta}&=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}\\&=(ac-bd)-(ad+bc)i\\&=(a-bi)(c-di)\\&=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}\end{aligned}$$

$\therefore$ 참

23. $z^2 = \sqrt{5} + i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{3}$　③ 2　④ $\sqrt{5}$　⑤ $\sqrt{6}$

해설

$z = x + yi$ (x, y 는 실수)로 놓으면 $(x+yi)^2 = \sqrt{5} + i$
$x^2 - y^2 + 2xyi = \sqrt{5} + i$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x^2 - y^2 = \sqrt{5},\ 2xy = 1$
$z\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 + y^2$ 이므로

$$(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = (\sqrt{5})^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6$$

$x^2 + y^2 > 0$ 이므로 $x^2 + y^2 = \sqrt{6}$
$\therefore\ z\bar{z} = \sqrt{6}$

해설

$z^2 = \sqrt{5} + i$, $\overline{z^2} = \sqrt{5} - i$
$z^2\overline{z^2} = (\sqrt{5} + i)(\sqrt{5} - i) = 6$
$z\bar{z} = \pm\sqrt{6}$
$z\bar{z} \geq 0$ 이므로 $z\bar{z} = \sqrt{6}$

24. $a,\ b$는 양수라 할 때, 다음 중 $z = a(1+i) + b(1-i), i = \sqrt{-1}$의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $1-3i$ ② $2+3i$ ③ $4-2i$
④ $-3+2i$ ⑤ $2-5i$

해설

$z = (a+b) + (a-b)\,i$ (a, b 는 양수)
① $1-3i$ 에서 $a+b=1,\ a-b=-3$
$a=-1,\ b=2 \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남
② $2+3i$ 에서 $a+b=2,\ a-b=3$
$a=\frac{5}{2},\ b=-\frac{1}{2} \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남
③ $4-2i$ 에서 $a+b=4,\ a-b=-2$
$a=1,\ b=3 \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건을 만족시킴
④ $-3+2i$ 에서 $a+b=-3,\ a-b=2$
$a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{5}{2} \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남
⑤ $2-5i$ 에서 $a+b=2,\ a-b=-5$
$a=-\frac{3}{2},\ b=\frac{7}{2} \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

25. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$ 의 값을 구하면?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$2\alpha = -1 + \sqrt{3}i$

$2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱하여 정리하면

$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

$\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$

$= \alpha(\alpha^2 + \alpha + 1) + (\alpha^2 + \alpha + 1) + 4$

$= 4$

해설

$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ 을 얻은 후 $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$ 를 $\alpha^2 + \alpha + 1$ 로 나누면

$\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$

$= (\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha + 1) + 4$

$= 4$ $(\because\ \alpha^2 + \alpha + 1 = 0)$