

1. 다음 보기의 복소수 중 실수인 것의 개수는?

보기

$$2i, \quad 1 + \sqrt{-4}, \quad 3 + 4i, \quad 9, \quad i^2 + 1$$

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

$a + bi$ 에서 $b = 0$ 인 경우, 즉 허수 부분이 0이면 실수이다.

$2i$ 의 허수 부분은 2, $1 + \sqrt{-4} = 1 + 2i$ 에서 허수 부분은 2이고,
 $3 + 4i$ 의 허수 부분은 4이다.

9와 $i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$ 의 허수 부분은 0이다.

따라서 실수인 것은 9와 $i^2 + 1$ 로 두 개다.

2. 등식 $\frac{x}{1+2i} + \frac{y}{1-2i} = 1 - \frac{i}{5}$ 를 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $16xy$ 의 값은?

① 97

② 98

③ 99

④ 100

⑤ 101

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌변}) &= \frac{x}{1+2i} + \frac{y}{1-2i} \\&= \frac{x(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} + \frac{y(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)}\end{aligned}$$

$$\frac{(x+y) + 2(y-x)i}{5} \text{ 이므로}$$

$$\frac{x+y}{5} + \frac{2(y-x)i}{5} = 1 - \frac{i}{5}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\frac{x+y}{5} = 1, \quad \frac{2(y-x)}{5} = -\frac{1}{5}$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x = \frac{11}{4}, \quad y = \frac{9}{4}$$

$$\therefore 16xy = 16 \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{9}{4} = 99$$

3. $\frac{2+3i}{3-i}$ 를 계산하면?

① $\frac{3}{8} + \frac{13}{8}i$

④ $\frac{3}{8} - \frac{13}{8}i$

② $\frac{3}{10} + \frac{11}{10}i$

⑤ $\frac{4}{9} + \frac{11}{9}i$

③ $\frac{3}{10} - \frac{11}{10}i$

해설

$$\frac{2+3i}{3-i} = \frac{(2+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3}{10} + \frac{11}{10}i$$

4. $\sqrt{(-1)^2} + i^2 - \frac{1}{i}$ 를 계산하면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① -1

② 0

③ 1

④ $-i$

⑤ i

해설

$$(\text{준식}) = 1 - 1 + i = i$$

5. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a \geq 0, b < 0$

② $a > 0, b > 0$

③ $a \geq 0, b > 0$

④ $a < 0, b < 0$

⑤ $a \leq 0, b < 0$

해설

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 가 성립할 조건은 $b < 0$ 이고 $a \geq 0$ 일 때이다.

6. $i^2 = -1$ 이라 할 때, 다음 중 제곱하여 음수가 되는 수의 개수는 ?

$-2, -\sqrt{2}, 2i, -2i,$
 $3i, -3i, 1-i, 1+i$

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

$i^2 = -1$ 이므로 제곱해서 음수가 되는 수는 순허수, 즉 $ai(a \neq 0)$ 의 꼴이 되어야 한다.

$\therefore 2i, -2i, 3i, -3i$ 4 개,

$2, -\sqrt{2}$ 는 실수이므로

(실수) $^2 \geq 0$, $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$ 가 된다.

7. 등식 $3x - 2yi = (2 + i)^2$ 이 성립하는 x, y 에 대하여 두 수를 곱하면?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$3x - 2yi = (2 + i)^2 = 3 + 4i$$

$$x = 1, \quad y = -2$$

$$\therefore xy = -2$$

8. $x = 1 + 2i$, $y = \frac{1 + 2i}{1 - i}$, $z = \frac{1 - 2i}{1 - i}$ 일 때, $xy + xz$ 의 값을 구하면?

① $-1 + 3i$

② $-1 - 2i$

③ $-1 + 2i$

④ $-1 - i$

⑤ $-1 + i$

해설

$$x = 1 + 2i, y = \frac{1 + 2i}{1 - i}, z = \frac{1 - 2i}{1 - i}$$

$$\begin{aligned}\therefore xy + xz &= \frac{(1 + 2i)^2}{1 - i} + \frac{(1 - 2i)(1 + 2i)}{1 - i} \\ &= \frac{-3 + 4i + 5}{1 - i} \\ &= \frac{2 + 4i}{1 - i} \\ &= -1 + 3i\end{aligned}$$

9. $z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + i$ 일 때, $z_1^3 + z_2^3$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $4 - 2i$

② 0

③ 20

④ $-2 + 4i$

⑤ -4

해설

$$z_1 + z_2 = 2, z_1 z_2 = 2$$

$$z_1^3 + z_2^3 = (z_1 + z_2)^3 - 3z_1 z_2 (z_1 + z_2)$$

$$= 8 - 12$$

$$= -4$$

10. $x = 2009$, $y = 7440$ 일 때, $\frac{x + yi}{y - xi} + \frac{y - xi}{x + yi}$ 의 값은?

① 0

② 1

③ -1

④ i

⑤ $-i$

해설

주어진 식을 정리하면

$$\frac{x + yi}{y - xi} + \frac{y - xi}{x + yi}$$

$$= \frac{(x + yi)^2 + (y - xi)^2}{(y - xi)(x + yi)}$$

$$= \frac{x^2 + 2xyi - y^2 + y^2 - 2xyi - x^2}{xy + y^2i - x^2i + xy} = 0$$

따라서 구하는 값은 0

11. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

$$\text{I. } \sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3) \cdot (-3)} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{II. } \sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5 \times (-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$$

$$\text{III. } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\frac{2}{-6}} = \sqrt{-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}i$$

$$\text{IV. } \frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$$

① I, II

② I, III

③ II, III, IV

④ II, IV

⑤ III, IV

해설

$$\text{I. } \sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$$

∴ 옳지 않다.

$$\text{II. } \sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$$

∴ 옳다.

$$\text{III. } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\frac{2}{6}} \cdot \frac{i}{i^2} = -\sqrt{\frac{1}{3}}i$$

∴ 옳지 않다.

$$\text{IV. } \frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$$

∴ 옳다.

12. $\sqrt{-x^2(x^2-1)^2}$ 이 실수가 되는 서로 다른 실수 x 들의 총합은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{-x^2(x^2-1)^2} &= \sqrt{x^2(x^2-1)^2}i \\ &= \sqrt{x^2} \sqrt{(x^2-1)^2}i \\ &= |x| \cdot |x^2-1| i \\ &= |x| \cdot |x+1| |x-1| i\end{aligned}$$

그러므로 $x = 0, 1, -1$ 일 때 총합은 0이 된다.

13. 복소수 $(1+i)x^2 - (2+i)x - 3 - 2i$ 를 제공하면 음의 실수가 된다고 할 때, 실수 x 의 값은?

① -1

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$(\text{준식}) = x^2 - 2x - 3 + (x^2 - x - 2)i$$

이것을 제공해서 음의 실수가 되려면 순허수이어야 하므로

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \cdots \textcircled{㉠}, \quad x^2 - x - 2 \neq 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } x = 3, x = -1$$

이 중에서 $\textcircled{㉡}$ 를 만족하는 것은 $\therefore x = 3$

14. 복소수 $(1+i)x^2 + 2(2+i)x + 3 - 3i$ 를 제공하면 음의 실수가 된다.
이 때, 실수 x 의 값은?
(단, $i^2 = -1$)

- ① -1 ② 1 ③ -3 ④ 3 ⑤ 7

해설

$(x^2 + 4x + 3) + (x^2 + 2x - 3)i$ 가 순허수이어야 하므로

$$x^2 + 4x + 3 = 0, \quad x^2 + 2x - 3 \neq 0$$

$$(x+3)(x+1) = 0, \quad x = -1, \quad x = -3$$

$$(x+3)(x-1) \neq 0, \quad x \neq 1, \quad x \neq -3$$

$$\therefore x = -1$$

15. 다음 중 옳은 것은?

① $(1 + \sqrt{-1})^3 = 2i + 4$

② $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} = 2i$

③ $(-\sqrt{-3})^2 = 3$

④ $(\sqrt{-5})^3 = 5\sqrt{5}i$

⑤ $\sqrt{-3}\sqrt{-9} = -3\sqrt{3}$

해설

① $-2 + 2i$

② $-2i$

③ -3

④ $-5\sqrt{5}i$

16. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ 일 때, $f\left(\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right) + f\left(\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned} & f\left(\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right) + f\left(\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2\right) \\ &= f(i^2) + f((-i)^2) \\ &= f(-1) + f(-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

17. 임의의 자연수 m, n 에 대하여 $i^{3m} + i^{3n+1}$ 이 나타낼 수 있는 서로 다른 복소수는 모두 몇 개 인가? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 4개

② 6개

③ 8개

④ 9개

⑤ 10개

해설

i) $i^{3m} = (-i)^m \Rightarrow -i, -1, i, 1$

ii) $i^{3n+1} = (-i)^n \times i \Rightarrow 1, -i, -1, i$

$\therefore$ i+ ii를 더해서 나올 수 있는 수는

$(0, 2, 1-i, 1+i, -1-i, -1+i, 2i, -2i, -2)$ 의 9가지 이다.

18. 복소수 z 와 그의 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① $z + \bar{z}$ 는 실수이다. ② $z = \bar{z}$ 이면 z 는 실수이다.
③ $z\bar{z} = 1$ 이면 $z^2 = 1$ 이다. ④ $z\bar{z} = 0$ 이면 $z = 0$ 이다.
⑤ $z\bar{z}$ 는 실수이다.

해설

복소수 z 와 그의 켤레복소수를 각각

$z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$ (a, b 는 실수)라 하면

- ① $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ (참)
② $z = \bar{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi$
 $\Leftrightarrow 2bi = 0$
 $\Leftrightarrow b = 0$ (참)
③ $z\bar{z} = a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow z^2 = a^2 - b^2 + 2abi \neq 1$ (거짓)
(반례) $a = 0$, $b = 1$ 일 때, $z^2 = -1$
④ $z\bar{z} = a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$, $b = 0$ (참)
⑤ $z\bar{z} = a^2 + b^2$ (참)

19. 등식 $x(3 + 4i) + \overline{y(1 + i)} = 5 + 2i$ 를 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & x(3 + 4i) + \overline{y(1 + i)} \\ &= 3x + 4xi + y - yi \\ &= (3x + y) + (4x - y)i \\ &= 5 + 2i \\ \therefore & 3x + y = 5, \quad 4x - y = 2 \\ & x = 1, \quad y = 2 \\ \therefore & x + y = 3 \end{aligned}$$

20. 다음을 계산하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$

▶ 답 :

▶ 정답 : $-3 + 3i$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}} \\ &= \sqrt{3 \cdot (-3)} - \sqrt{(-3) \cdot (-3)} + \sqrt{\frac{-18}{2}} - \sqrt{\frac{18}{-2}} \\ &= \sqrt{-9} - \sqrt{9} + \sqrt{-9} - \sqrt{-9} \\ &= -\sqrt{9} + \sqrt{-9} \\ &= -3 + 3i \end{aligned}$$

21. $i(x+i)^3$ 이 실수일 때, 실수 x 의 값으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 0

② $\sqrt{3}$

③ $-\sqrt{3}$

④ 1

⑤ -1

해설

$$\begin{aligned}i(x+i)^3 &= i(x^3 + 3x^2i - 3x - i) \\ &= (-3x^2 + 1) + (x^3 - 3x)i\end{aligned}$$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$$\therefore x^3 - 3x = 0$$

$$x(x^2 - 3) = 0$$

$$\therefore x = 0, \pm\sqrt{3}$$

22. 복소수 α, β 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\bar{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

- ㉠ $\alpha + \bar{\alpha}$ 는 실수이다.
- ㉡ $\alpha - \bar{\alpha}$ 는 허수이다.
- ㉢ α^2 이 실수이면 α 도 실수이다.
- ㉣ $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ 이고 $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$ 이다.

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉣

③ ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉣

⑤ ㉡, ㉣

해설

$\alpha = a + bi, \beta = c + di$ (a, b, c, d 는 실수)라 하면

㉠ $\alpha + \bar{\alpha} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ (실수)

$\therefore$ 참

㉡ α 가 실수이면 $\alpha = \bar{\alpha}$ 이므로 $\alpha - \bar{\alpha} = 0$ 이다.

따라서 $\alpha - \bar{\alpha}$ 가 반드시 허수인 것은 아니다.

$\therefore$ 거짓

㉢ $i^2 = -1$ 은 실수이지만 i 는 순허수이다.

$\therefore$ 거짓

$$\begin{aligned} \text{㉣ } \overline{\alpha + \beta} &= \overline{(a + c) + (b + d)i} \\ &= (a + c) - (b + d)i \\ &= (a - bi) + (c - di) \\ &= \bar{\alpha} + \bar{\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\alpha\beta} &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i \\ &= (a - bi)(c - di) \\ &= \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} \end{aligned}$$

$\therefore$ 참

23. $z^2 = \sqrt{5} + i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{3}$

③ 2

④ $\sqrt{5}$

⑤ $\sqrt{6}$

해설

$$\begin{aligned} z &= x + yi \quad (x, y \text{ 는 실수}) \text{로 놓으면 } (x + yi)^2 = \sqrt{5} + i \\ x^2 - y^2 + 2xyi &= \sqrt{5} + i \text{ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여} \\ x^2 - y^2 &= \sqrt{5}, \quad 2xy = 1 \\ z\bar{z} &= (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = (\sqrt{5})^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6$$

$$x^2 + y^2 > 0 \text{ 이므로 } x^2 + y^2 = \sqrt{6}$$

$$\therefore z\bar{z} = \sqrt{6}$$

해설

$$\begin{aligned} z^2 &= \sqrt{5} + i, \quad \bar{z}^2 = \sqrt{5} - i \\ z^2\bar{z}^2 &= (\sqrt{5} + i)(\sqrt{5} - i) = 6 \\ z\bar{z} &= \pm\sqrt{6} \\ z\bar{z} &\geq 0 \text{ 이므로 } z\bar{z} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

24. a, b 는 양수라 할 때, 다음 중 $z = a(1+i) + b(1-i), i = \sqrt{-1}$ 의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $1 - 3i$

② $2 + 3i$

③ $4 - 2i$

④ $-3 + 2i$

⑤ $2 - 5i$

해설

$z = (a+b) + (a-b)i$ (a, b 는 양수)

① $1 - 3i$ 에서 $a+b=1, a-b=-3$

$a=-1, b=2 \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건에 어긋남

② $2 + 3i$ 에서 $a+b=2, a-b=3$

$a=\frac{5}{2}, b=-\frac{1}{2} \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건에 어긋남

③ $4 - 2i$ 에서 $a+b=4, a-b=-2$

$a=1, b=3 \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건을 만족시킴

④ $-3 + 2i$ 에서 $a+b=-3, a-b=2$

$a=-\frac{1}{2}, b=-\frac{5}{2} \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건에 어긋남

⑤ $2 - 5i$ 에서 $a+b=2, a-b=-5$

$a=-\frac{3}{2}, b=\frac{7}{2} \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건에 어긋남

25. $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$ 의 값을 구하면?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$2\alpha = -1 + \sqrt{3}i$$

$$2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

$$\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$$

$$= \alpha(\alpha^2 + \alpha + 1) + (\alpha^2 + \alpha + 1) + 4$$

$$= 4$$

해설

$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ 을 얻은 후 $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$ 를 $\alpha^2 + \alpha + 1$ 로 나누면

$$\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$$

$$= (\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha + 1) + 4$$

$$= 4 (\because \alpha^2 + \alpha + 1 = 0)$$