

1. 다음 <보기>는 방정식 $x^2 + y^2 - 2x + y + k = 0$ 에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르면 몇 개인가?

- ㉠ $k < \frac{5}{4}$ 이면 방정식은 원을 나타낸다.
 ㉡ $k = -\frac{5}{4}$ 일 때, 방정식은 중심이 $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ 이고, 반지름이 $\frac{5}{2}$ 이다.
 ㉢ $k < 4$ 일 때, 방정식이 나타내는 도형은 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
 ㉤ $k = \frac{1}{4}$ 일 때, 방정식이 나타내는 도형은 y 축과 접한다.
 ㉥ $k < \frac{5}{4}$ 인 임의의 실수 k 에 대하여 방정 식이 나타내는 도형은 x 축과 y 축에 동 시에 접할 수 없다.

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

주어진 방정식을 정리하면,

$$(x-1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} - k \text{ 이다.}$$

$y=0$ 을 대입 후 정리하면, $(x-1)^2 = 1-k$

$\Rightarrow k < 1$ 일 때 두 점에서 만난다.

㉢ $x=0$ 를 대입 후 정리하면,

$$(y+\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} - k$$

$\therefore k = \frac{1}{4}$ 일 때 접한다.

㉤ 중심이 $y=x$ 위에 있지 않으므로

x 축, y 축 동시에 접하지 않는다.

$\therefore$ (㉠, ㉢, ㉤) 가 참이다.

2. 세 점 $(-3, 1)$, $(5, 5)$, $(-2, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형의 외접원의 중심(외심)의 좌표를 구하면?
- ① $(3, -1)$ ② $(2, 1)$ ③ $(4, 2)$
④ $(-3, -2)$ ⑤ $(3, -2)$

해설

외접원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \cdots \textcircled{1}$ 이라 하면,
 $\textcircled{1}$ 은 $(-3, 1)$, $(5, 5)$, $(-2, -2)$ 를 지나므로

$$\begin{cases} 10 - 3A + B + C = 0 \\ 50 + 5A + 5B + C = 0 \\ 8 - 2A - 2B + C = 0 \end{cases}$$

세 식을 연립하여 풀면
 $A = -4$, $B = -2$, $C = -20$
따라서, 구하는 원은 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$
즉, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ 이고 중심은 $(2, 1)$

3. 점 (1, 2)를 지나고 x 축 및 y 축에 동시에 접하는 원은 두 개가 존재할 때, 이 두 원의 중심 사이의 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이 원이 점 (1, 2)를 지나므로 $(1-r)^2 + (2-r)^2 = r^2$, $r^2 - 6r + 5 = 0$, $(r-1)(r-5) = 0$
 $\therefore r = 1$ 또는 $r = 5$
따라서, 두 원의 중심은 각각 (1, 1), (5, 5) 이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(5-1)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{2}$

4. 두 원 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ 가 외접할 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 원 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ 의 중심
사이의 거리 $d = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$
두 원이 외접하면 $r + 2 = 5$ 이므로 $r = 3$

5. 두 원 $x^2 + y^2 - 5 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$ 의 교점과 점(1,1)을 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 일 때, $A + B - C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$x^2 + y^2 - 5 = 0, x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

교점을 지나는 원의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 5)m + x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

의 꼴이고, 이 원이 점 (1,1)을지나므로

$$(1 + 1 - 5)m + 1 + 1 - 3 - 1 - 4 = 0$$

$$\therefore m = -2$$

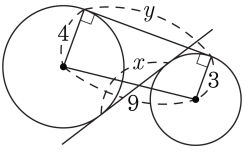
이 값을 대입하고 정리하면

$$x^2 + y^2 + 3x + y - 6 = 0 \text{ 이다.}$$

$$\therefore A = 3, B = 1, C = -6$$

$$\text{그러므로 } A + B - C = 10$$

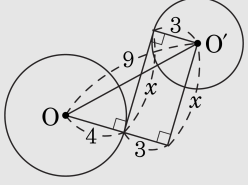
6. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 3, 4 이고 중심거리가 9 인 두 원의 공통내접선의 길이와 공통외접선의 길이를 각각 x , y 라 할 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하시오.



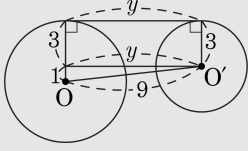
▶ 답 :

▷ 정답 : 112

해설



$$9^2 = (4 + 3)^2 + x^2 \quad \therefore x^2 = 9^2 - 7^2$$



$$9^2 = y^2 + (4 - 3)^2 \quad \therefore y^2 = 9^2 - 1^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 2 \cdot 9^2 - 7^2 - 1^2 = 112$$

7. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0, \quad 3x - 4y + 6 = 0$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면
 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2^2$
따라서 , 원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선
 $3x - 4y + 6 = 0$ 까지의 거리 d 는
$$d = \frac{|17|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{17}{5}$$

이때, $\frac{17}{5} > 2$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.
∴ 교점의 개수 : 0개

8. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $x + y = k$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 k 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$ ② $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$ ③ $-1 < k < 1$
④ $-2 < k < 2$ ⑤ $-3 < k < 3$

해설

원과 직선이 두점에서 만난다면, 직선과 원의 중심사이의 거리인 d 가 반지름 r 보다 작아야 한다.

즉 $d < r$ 이므로

$$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} < 1$$

$$\Rightarrow |-k| < \sqrt{2}$$

$$\therefore -\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$$

9. 직선 $3x - y - 1 = 0$ 에 평행하고 원 $x^2 + y^2 = 10$ 에 접하는 접선의 방정식을 $y = mx \pm n$ 이라고 할 때, mn 의 값은?

① $3\sqrt{10}$

② $-3\sqrt{10}$

③ 30

④ -30

⑤ $\frac{10}{3}$

해설

접선이 직선 $3x - y - 1 = 0$, 즉 $y = 3x - 1$ 에 평행하므로 접선의 기울기는 3이다.

공식을 이용하면 접선의 방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{10} \sqrt{1 + 3^2}, y = 3x \pm 10 \text{ 이므로}$$

$$m = 3, n = 10 \therefore mn = 30$$

10. 좌표평면 위의 두 점 A(8, 0), B(0, 6) 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

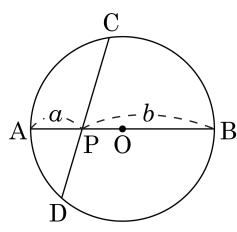
▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle AOB = 90^\circ$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.
 $\overline{AB} = 10$ 이고 원의 중심은 $C(4, 3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$
이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$
 $a = -8, b = -6, c = 0$
 $\therefore abc = 0$

11. 다음 그림과 같이 원의 지름 AB 위의 임의의 한 점 P를 지나 $\overline{PC}$ 의 길이가 원의 반지름의 길이와 같아지도록 현 CD를 긋는다. $\overline{AP} = a$, $\overline{BP} = b$ 라 할 때, 선분 DP의 길이를 a , b 를 써서 나타내면?



- ① $\frac{a+b}{2}$ ② $a+b$ ③ $\sqrt{ab}$
 ④ ab ⑤ $\frac{2ab}{a+b}$

해설

$$\overline{CP} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{a+b}{2} \text{ 이고}$$

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP} \text{ 이므로}$$

$$ab = \frac{a+b}{2} \cdot \overline{DP}$$

$$\therefore \overline{DP} = \frac{2ab}{a+b}$$

12. 점 $P(a, 0)$ 에서 원 $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ 에 그은 접선의 길이가 4일 때, 점 P의 좌표를 모두 구하면?

- ① $(1, 0), (7, 0)$ ② $(-1, 0), (7, 0)$ ③ $(1, 0), (-7, 0)$
④ $(-1, 0), (5, 0)$ ⑤ $(1, 0), (-5, 0)$

해설

원의 중심을 $C(3, 2)$, 접점을 Q라 하면

$$\overline{CP} = \sqrt{(a-3)^2 + 2^2}$$

CPQ는 직각삼각형이므로

$$(a-3)^2 + 4 = 2^2 + 4^2$$

$$a^2 - 6a - 7 = 0$$

$$(a+1)(a-7) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 7$$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(-1, 0), (7, 0)$ 이다.

13. 점 $P_1(1, 2)$ 를 점 $P_2(-1, 4)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(2, -2)$ 는 어떤 점으로 옮겨지는가?

㉠ $(0, 0)$

㉡ $(1, 1)$

㉢ $(4, 0)$

㉣ $(4, -4)$

㉤ $(1, 2)$

해설

주어진 평행이동은 x 축 방향으로 -2 , y 축 방향으로 $+2$ 만큼 평행이동하므로 $(2-2, -2+2) = (0, 0)$ 으로 이동한다.

14. 평행이동 $f: (x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$ 에 의하여 점 $(2, 3)$ 은 점 $(1, -1)$ 로 옮겨진다. 이 때, 평행이동 f 에 의하여 원 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ 이 옮겨지는 원의 방정식은?

- ① $x^2 + (y+2)^2 = 4$ ② $x^2 + (y-2)^2 = 4$
③ $(x-1)^2 + y^2 = 4$ ④ $(x+1)^2 + y^2 = 4$
⑤ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$

해설

$(2+a, 3+b) = (1, -1)$
 $\therefore a = -1, b = -4$
 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ 에서
 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ 이 원의 중심 $(1, 2)$ 는
평행이동 f 에 의하여 $(1-1, 2-4) = (0, -2)$
로 옮겨지므로
원 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ 이 옮겨지는
원의 방정식은 $x^2 + (y+2)^2 = 4$ 이다.

15. 원 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하였더니 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭인 도형이 되었다. 이때 $2m - n$ 의 값은?

- ① 1
- ② 3
- ③ 5
- ④ 7
- ⑤ 9

해설

원 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$,
즉 원 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ 을
 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼
평행이동한 도형은 중심이 $(-1 + m, 2 + n)$ 이고
반지름의 길이가 1인 원이다.
이때 두 원이 직선 $y = x$ 에 대칭이므로
 $(-1 + m, 2 + n) = (2, -1)$
 $m = 3, n = -3$ 이므로 $2m - n = 9$

16. 원 $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$ 을 직선 $3x + ay + 6 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $(x + 1)^2 + (y - 8)^2 = 1$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$ 을 표준형으로 나타내면

$$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①은 원 $(x + 1)^2 + (y - 8)^2 = 1$ 과

직선 $3x + ay + 6 = 0$ 에 대하여 대칭이므로

두 원의 중심 $(5, 4)$, $(-1, 8)$ 을 이은 선분의

중점이 직선 $3x + ay + 6 = 0$ 위에 있다.

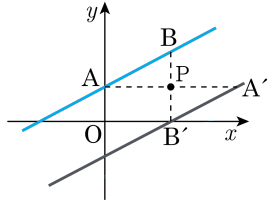
두 점 $(5, 4)$, $(-1, 8)$ 을 이은 선분의 중점은

$$\left(\frac{5 + (-1)}{2}, \frac{4 + 8}{2} \right), \text{ 즉 } (2, 6) \text{ 이므로}$$

$$3 \cdot 2 + a \cdot 6 + 6 = 0$$

$$\therefore a = -2$$

17. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 한 점 P에 대한 두 점 A, B의 대칭점은 각각 A', B'이고, 직선 AB의 방정식은 $x - 2y + 4 = 0$ 이라 한다. 점 A'의 좌표가 (3, 1), 직선 A'B'의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱은?



- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

두 점 A', B'은 각각 점 P에 대한 두 점 A, B의 대칭점이므로 직선 A'B'은 직선 AB의 점대칭도형이다.

즉, $\triangle APB \equiv \triangle A'PB'$ 에서 $\angle ABP = \angle A'B'P$ (엇각)이므로

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$$

따라서, 직선 A'B'의 기울기는 직선 AB의

기울기인 $\frac{1}{2}$ 과 같다.

또, 직선 A'B'은 점 A'(3, 1)을 지나므로 직선 A'B'의 방정식은

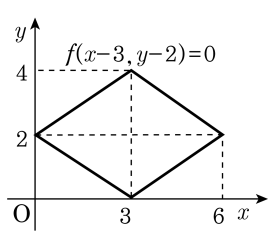
$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 3)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

따라서, $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$ab = -\frac{1}{4}$$

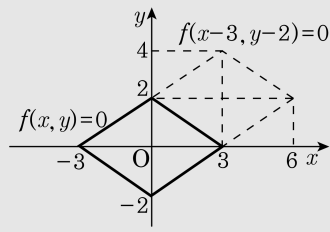
18. 방정식 $f(x-3, y-2) = 0$ 이 나타내는 도형이 다음 그림과 같을 때 방정식 $f(x+2, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 좌표 평면 위에 바르게 나타낸 것은?



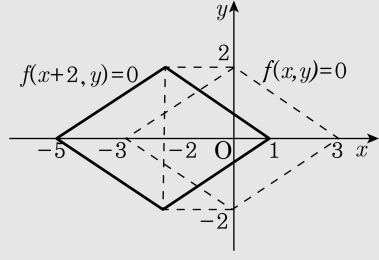
- ①
- ②
- ③
- ④
- ⑤

해설

주어진 $f(x-3, y-2) = 0$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면 다음 그림과 같이 $f(x, y) = 0$ 의 그래프를 얻을 수 있다.



$f(x+2, y) = 0$ 은 $f(x, y) = 0$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.



19. 다음 중 원 $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 2 = 0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

- ① $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$ ② $x^2 + y^2 = 1$
③ $x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{5}$ ④ $(x + 1)^2 + y^2 = 3$
⑤ $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면

반지름의 길이가 같아야 한다.

$x^2 + y^2 + 6x - 6y + 2 = 0$ 에서 $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 16$

따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은

반지름의 길이가 4인 ⑤이다.

20. 중심이 직선 $2x+y=0$ 위에 있고, 두 점 $(3, 0)$, $(0, 1)$ 을 지나는 원의 방정식은 ?

- ① $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$
- ② $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$
- ③ $5x^2 + 5y^2 - 8x + 16y - 21 = 0$
- ④ $5x^2 + 5y^2 + 8x - 16y - 21 = 0$
- ⑤ $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 12 = 0$

해설

구하는 원의 중심이 직선 $2x + y = 0$ 위에 있으므로 중심을 $(a, -2a)$ 라 할 수 있다.

$$(x-a)^2 + (y+2a)^2 = r^2$$

점 $(3, 0)$ 을 지나므로,

$$(3-a)^2 + (2a)^2 = r^2 \dots \textcircled{1}$$

또, 점 $(0, 1)$ 을 지나므로,

$$a^2 + (1+2a)^2 = r^2 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a = \frac{4}{5}, r^2 = \frac{37}{5}$$

$$\therefore \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{5}\right)^2 = \frac{37}{5}$$

$$\text{정리하면 } 5x^2 + 5y^2 - 8x + 16y - 21 = 0$$

21. 두 점 A(-2, 0), B(2, 0) 에서의 거리의 비가 3 : 1 인 점의 자취위의 점 P 라 할 때, △ABP 의 넓이의 최댓값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

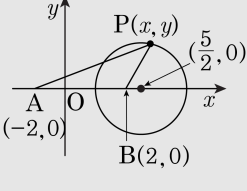
$$\overline{AP} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$
$$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$
$$\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1 \text{ 이므로}$$
$$\overline{AP} = 3\overline{BP} \rightarrow \overline{AP}^2 = 9\overline{BP}^2$$

따라서, $(x+2)^2 + y^2 = 9(x-2)^2 + 9y^2$

$$\rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = 9x^2 - 36x + 36 + 9y^2$$
$$\rightarrow 8x^2 + 8y^2 - 40x + 32 = 0$$
$$\rightarrow x^2 + y^2 - 5x + 4 = 0$$
$$\rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{25}{4} + 4 = 0$$
$$\rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

즉, 중심이 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$ 인 원이다.



$\therefore$ 넓이 S 의 최댓값 $= \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{2} = 3$

22. 직선 $x = 2$ 에 접하고, 원 $(x + 3)^2 + y^2 = 1$ 에 외접하는 원의 중심의 자취를 나타내는 식은?

① $y^2 = -8x$

② $y^2 = 8x$

③ $y^2 = -12x$

④ $x^2 = -8y$

⑤ $x^2 = 8y$

해설

구하는 원의 중심을 $P(x, y)$ 라 놓고 x, y 사이의 관계식을 세운다.

점 P 에서 직선 $x = 2$ 에 내린 수선의 발을 B , 원 $(x + 3)^2 + y^2 = 1$

의 중심을 A 라고 하면

$\overline{AP} - 1 = \overline{BP}$ 에서

$$\sqrt{(x + 3)^2 + y^2} - 1 = 2 - x$$

$$\therefore y^2 = -12x$$

23. 두 원 $x^2 + y^2 = 11$, $(x - 5)^2 + y^2 = 16$ 의 공통현의 길이는?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{11}$ ③ 5 ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

두 원 $x^2 + y^2 = 11$ 과 $(x - 5)^2 + y^2 = 16$ 의 공통현의 방정식은

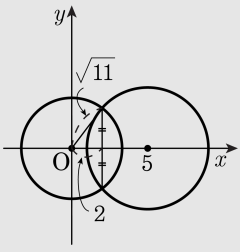
$$(x^2 + y^2 - 11) - (x^2 - 10x + y^2 + 9) = 0$$

$$10x - 20 = 0 \quad \therefore x = 2$$

원 $x^2 + y^2 = 11$ 의 중심 $(0, 0)$ 과 공통현 $x = 2$ 사이의 거리가 2이고,

반지름의 길이가 $\sqrt{11}$ 이므로 공통현의 길이는

$$2 \times \sqrt{(\sqrt{11})^2 - 2^2} = 2\sqrt{7}$$



24. 두 점 A(-1, 3), B(2, a)를
지나는 직선이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 접할 때, a의 값은?

㉠ -1 ㉡ 0 ㉢ 1 ㉣ 2 ㉤ 3

해설

두 점 A(-1, 3), B(2, a)를

지나는 직선의 방정식은, $y - 3 = \frac{a - 3}{3}(x + 1)$

$\therefore (a - 3)x - 3y + a + 6 = 0 \dots\dots\textcircled{\text{A}}$

직선 $\textcircled{\text{A}}$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 접하므로

원의 중심 (0, 0) 에서 직선 $\textcircled{\text{A}}$ 에 이르는 거리가

원의 반지름의 길이인 1 과 같다.

$\therefore \frac{|a + 6|}{\sqrt{(a - 3)^2 + 9}} = 1$

$\therefore |a + 6| = \sqrt{(a - 3)^2 + 9} \dots\dots\textcircled{\text{B}}$

$\textcircled{\text{B}}$ 의 양변을 제곱하면 $a^2 + 12a + 36 = a^2 - 6a + 9 + 9, 18a = -18$

$\therefore a = -1$

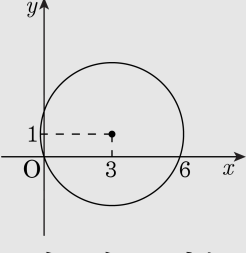
25. 원 $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 도형에 의하여 x 축이 잘렸을 때, 잘린 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원 $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$ 을 표준형으로 고치면,
 $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$,
이 원을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하면,
 $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10 \cdots \textcircled{1}$



$\textcircled{1}$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로
 $y = 0$ 일 때의 x 의 값을 구하면
 $(x - 3)^2 + (0 - 1)^2 = 10$ 에서
 $x^2 - 6x = 0, x(x - 6) = 0$
 $\therefore x = 0$ 또는 $x = 6$
따라서 잘린 선분의 길이는 6 이다.

26. 원 $x^2 + y^2 = 8$ 과 제1사분면에서 접하는 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A,B 라고 할 때, 직각삼각형 OAB 의 넓이의 최소값을 구하여라. (단, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

제1사분면에서의 원 위의 접점을 (x_1, y_1) 이라고 하면 접선의 방정식은 $x_1x + y_1y = 8 \cdots \cdots \textcircled{1}$ (단, $x_1 > 0, y_1 > 0$)

한편, 두 점 A,B 는 각각 접선 $\textcircled{1}$ 과 x 축, y 축의 교점이므로

$$A\left(\frac{8}{x_1}, 0\right), B\left(0, \frac{8}{y_1}\right)$$

따라서, 직각삼각형 OAB 의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x_1} \cdot \frac{8}{y_1} = \frac{32}{x_1 y_1}$$

이 때, (x_1, y_1) 이 원 $x^2 + y^2 = 8$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 8 \text{ 이고}$$

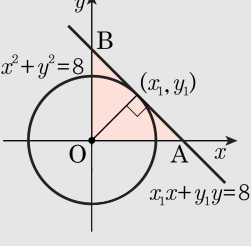
$x_1 > 0, y_1 > 0$ 에서

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot y_1^2} = x_1 y_1, x_1 y_1 \leq 4$$

$$\therefore \frac{1}{x_1 y_1} \geq \frac{1}{4} \leftarrow \frac{x_1^2 + y_1^2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\therefore S = \frac{32}{x_1 y_1} \geq 32 \cdot \frac{1}{4} = 8 \text{ (단, 등호는 } x_1 = y_1 \text{ 일 때 성립)}$$

따라서, 구하는 넓이의 최소의 값은 8 이다.



27. 점 $(1, -1)$ 에서 원 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 에 그은 접선은 두 개 있다.
이 때, 이 두 직선의 기울기의 합은?

① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

해설

점 $(1, -1)$ 을 지나고 기울기가 m 인 접선을
 $y+1=m(x-1)$, 즉 $mx-y-m-1=0$ 이라고 하면
원의 중심 $(-1, 2)$ 에서 접선까지의 거리는
원의 반지름 1과 같아야 한다.

$$\text{따라서 } 1 = \frac{|-2m-3|}{\sqrt{m^2+1}},$$

$$|-2m-3| = \sqrt{m^2+1}$$

$$\text{양변을 제곱하여 정리하면 } 3m^2+12m+8=0$$

따라서 두 기울기의 합은 근과 계수와의 관계에 의하여 -4 이다.

28. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ 의 공통접선의 방정식을 구하면?

① $x = -2$, $y = -1$

② $x = 1$, $y = 1$

③ $x = -1$, $y = 1$

④ $x = 1$, $y = -1$

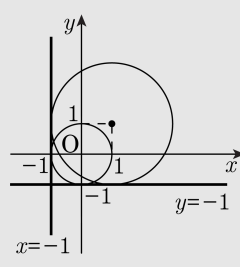
⑤ $x = -1$, $y = -1$

해설

그림을 그려보면 두 개의 공통접선이

존재하고 그 식은 각각

$x = -1$, $y = -1$



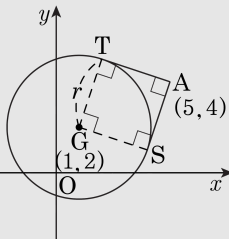
29. 좌표평면 위에 원 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = r^2$ 과 원 밖의 점 A(5, 4)가 있다. 점 A에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r 의 값은?

- ① $\sqrt{10}$
- ② $\sqrt{11}$
- ③ $\sqrt{12}$
- ④ $\sqrt{13}$
- ⑤ $\sqrt{14}$

해설

A에서 그은 접선이 서로 수직이면 원의 중심 G, 점점 S, T, 점 A로 이루어지는 사각형 GSAT는 한 변의 길이가 r 인 정사각형이다.

$$\therefore r = \frac{\overline{GA}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(5-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{10}$$



30. 두 원 $C_1 : (x-1)^2 + y^2 = 1$, $C_2 : (x-3)^2 + y^2 = 1$ 에 동시에 외접하는 제1 사분면 위의 원 C_3 가 있다. 세 원의 중심을 이은 삼각형이 정삼각형이 될 때, 원점에서 원 C_3 의 중심까지의 거리를 d , 원 C_3 의 반지름의 길이를 r 라 하자. 이때, $d \times r$ 의 값은?

- ① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

세 원의 중심을 각각 A, B, C 라 하면,
두 원의 중심의 좌표가 A(1, 0), B(3, 0)
이다.

$\overline{AC} = 2$ 이고 삼각형 ABC 가
정삼각형이므로 C(a , b) 라 하면

$$a = 1 + \overline{AC} \cos 60^\circ, b = \overline{AC} \sin 60^\circ$$

$$\therefore C(2, \sqrt{3})$$

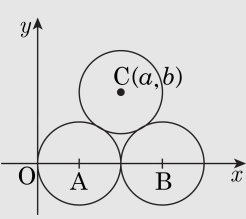
따라서 원 C_3 는 중심이 $(2, \sqrt{3})$ 이고

반지름의 길이가 1 인 원이므로, 원점에서

원의 중심 C($2, \sqrt{3}$) 까지의 거리는

$$d = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$$

$$\therefore d \times r = \sqrt{7}$$



31. 직선 $y = 3x$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동 한 직선이 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접할 때, a^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

x 축 방향으로 a 만큼 평행 이동시킨 직선

$$: y = 3(x - a) \Rightarrow 3x - y - 3a = 0$$

원에 접하므로 중심과 직선 사이의 거리는 반지름의 길이와 같다.

$$\frac{|-3a|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = 3$$

$$a = \pm \sqrt{10}$$

$$\therefore a^2 = 10$$

32. 실수 x, y 가 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 을 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a+b$ 를 구하면?

① $2\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{13}$ ③ $2\sqrt{17}$ ④ 16 ⑤ 28

해설

$x^2 + y^2 = k$ 인 원을 생각해보면,
두 원이 외접할 때 k 가 최소, 내접할 때 k 가 최대가 된다.
 $\Rightarrow$ 외접 : 중심사이의 거리 = 반지름의 합
 $\Rightarrow \sqrt{3^2 + 2^2} = 1 + \sqrt{k} \quad \therefore k = (\sqrt{13} + 1)^2$
 $\Rightarrow$ 내접 : 중심사이의 거리 = 반지름의 차
 $\Rightarrow \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{k} - 1 \quad \therefore k = (\sqrt{13} - 1)^2$
 $\therefore k$ 의 합은 $(\sqrt{13} - 1)^2 + (\sqrt{13} + 1)^2 = 28$

33. 직선 $y = 0$ 을 직선 $y = mx$ 에 대하여 대칭이동시킨 직선과 $x - y + 2 = 0$ 과의 교점을 P 라 할 때 $\overline{OP}$ 의 최솟값은? (단, O 는 원점이다.)

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

직선 $y = 0$ 을 직선 $y = mx$ 에 대하여 대칭 이동시킨 직선을 $y = m'x$ 이라 할 때

$y = m'x$ 와 $x - y + 2 = 0$ 의 교점을 P 라 하면

$\overline{OP}$ 의 최솟값은 원점에서 직선 $x - y + 2 = 0$ 에 이르는 거리와 같다.

따라서 $\overline{OP}$ 의 최솟값은 $\frac{|2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$ 이다.

