1. 다음<보기>는 방정식 $x^2+y^2-2x+y+k=0$ 에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르면 몇 개인가?

> ㉠ $k<\frac{5}{4}$ 이면 방정식은 원을 나타낸다.
> ㉡ $k=-\frac{5}{4}$ 일 때, 방정식은 중심이 $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ 이고, 반지름이 $\frac{5}{2}$ 이다.
> ㉢ $k<4$ 일 때, 방정식이 나타내는 도형은 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
> ㉣ $k=\frac{1}{4}$ 일 때, 방정식이 나타내는 도형은 y 축과 접한다.
> ㉤ $k<\frac{5}{4}$ 인 임의의 실수 k 에 대하여 방정 식이 나타내는 도형은 x 축과 y 축에 동 시에 접할 수 없다.

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

주어진 방정식을 정리하면,

$(x-1)^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}-k$ 이다.

$y=0$ 을 대입 후 정리하면,$(x-1)^2=1-k$

$\Rightarrow\ k<1$ 일 때 두 점에서 만난다.

㉣ $x=0$ 를 대입 후 정리하면,

$(y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}-k$

$\therefore\ k=\frac{1}{4}$ 일 때 접한다.

㉤ 중심이 $y=x$ 위에 있지 않으므로 x 축, y 축 동시에 접하지 않는다.

$\therefore$ (㉠,㉣,㉤) 가 참이다.

2. 세 점$(-3,\ 1)$, $(5,\ 5)$, $(-2, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형의 외접원의 중심(외심)의 좌표를 구하면?

① $(3,\ -1)$ ② $(2,\ 1)$ ③ $(4,\ 2)$

④ $(-3,\ -2)$ ⑤ $(3,\ -2)$

해설

외접원의 방정식을

$x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0\cdots$㉠ 이라 하면,

㉠은 $(-3,\ 1)$, $(5,\ 5)$, $(-2,\ -2)$를 지나므로

$$\begin{cases} 10-3\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=0 \\ 50+5\mathrm{A}+5\mathrm{B}+\mathrm{C}=0 \\ 8-2\mathrm{A}-2\mathrm{B}+\mathrm{C}=0 \end{cases}$$

세 식을 연립하여 풀면

$\mathrm{A}=-4$, $\mathrm{B}=-2$, $\mathrm{C}=-20$

따라서, 구하는 원은 $x^2+y^2-4x-2y-20=0$

즉, $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ 이고 중심은 $(2,\ 1)$

3. 점 $(1,\ 2)$를 지나고 x축 및 y축에 동시에 접하는 원은 두 개가 존재할 때, 이 두 원의 중심 사이의 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은
$(x-r)^2 \times (y-r)^2 = r^2$ 이 원이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로
$(1-r)^2 + (2-r)^2 = r^2,\ r^2 - 6r + 5 = 0,\ (r-1)(r-5) = 0$
$\therefore r = 1$ 또는 $r = 5$
따라서, 두 원의 중심은 각각 $(1, 1)$, $(5, 5)$이므로
두 원의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{(5-1)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{2}$

4. 두 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$, $(x+3)^2+(y-4)^2=4$가 외접할 때, r의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$, $(x+3)^2+(y-4)^2=4$의 중심 사이의 거리 $d=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

두 원이 외접하면 $r+2=5$이므로 $r=3$

5. 두 원 $x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2-3x-y-4=0$ 의 교점과 점$(1,1)$을 지나는 원의 방정식이 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 일 때, $A+B-C$ 의 값을 구하여라.

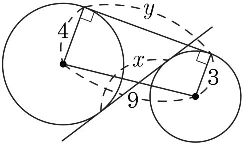
▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2-3x-y-4=0$
교점을 지나는 원의 방정식은
$(x^2+y^2-5)m+x^2+y^2-3x-y-4=0$
의 꼴이고, 이 원이 점 $(1,1)$을지나므로
$(1+1-5)m+1+1-3-1-4=0$
$\therefore m=-2$
이 값을 대입하고 정리하면
$x^2+y^2+3x+y-6=0$ 이다.
$\therefore A=3,\ B=1,\ C=-6$
그러므로 $A+B-C=10$

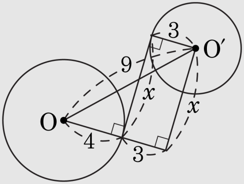
6. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 3, 4 이고 중심거리가 9 인 두 원의 공통내접선의 길이와 공통외접선의 길이를 각각 x, y 라 할 때, x^2+y^2 의 값을 구하시오.



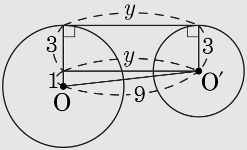
▶ 답 :

▷ 정답 : 112

해설



$9^2=(4+3)^2+x^2 \quad \therefore \ x^2=9^2-7^2$



$9^2=y^2+(4-3)^2 \quad \therefore \ y^2=9^2-1^2$

$\therefore \ x^2+y^2=2\cdot 9^2-7^2-1^2 \ =112$

7. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0, \quad 3x - 4y + 6 = 0$$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2^2$

따라서 , 원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선

$3x - 4y + 6 = 0$ 까지의 거리 d 는

$$d = \frac{|17|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{17}{5}$$

이때, $\frac{17}{5} > 2$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

$\therefore$ 교점의 개수 : 0 개

8. 원 $x^2+y^2=1$ 과 직선 $x+y=k$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ ③ $-1<k<1$

④ $-2<k<2$ ⑤ $-3<k<3$

해설

원과 직선이 두점에서 만난다면, 직선과 원의 중심사이의 거리인 d가 반지름 r보다 작아야 한다.

즉 $d<r$이므로

$$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}<1$$

$\Rightarrow |-k|<\sqrt{2}$

$\therefore -\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

9. 직선 $3x-y-1=0$ 에 평행하고 원 $x^2+y^2=10$ 에 접하는 접선의 방정식을 $y=mx\pm n$ 이라고 할 때, mn의 값은?

① $3\sqrt{10}$ ② $-3\sqrt{10}$ ③ 30

④ -30 ⑤ $\dfrac{10}{3}$

해설

접선이 직선 $3x-y-1=0$, 즉 $y=3x-1$에 평행하므로 접선의 기울기는 3이다.

공식을 이용하면 접선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{10}\sqrt{1+3^2}$, $y=3x\pm10$ 이므로

$m=3,\ n=10\ \therefore mn=30$

10. 좌표평면 위의 두 점 $A(8, 0)$, $B(0, 6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle AOB = 90°$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.

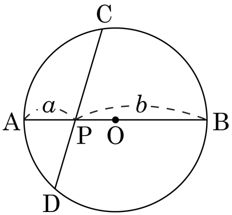
$\overline{AB} = 10$ 이고 원의 중심은 $C(4, 3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5^2$

이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

$a = -8,\ b = -6,\ c = 0$

$\therefore abc = 0$

11. 다음 그림과 같이 원의 지름 AB 위의 임의의 한 점 P 를 지나 $\overline{\mathrm{PC}}$ 의 길이가 원의 반지름의 길이와 같아지도록 현 CD 를 긋는다. $\overline{\mathrm{AP}}=a$, $\overline{\mathrm{BP}}=b$ 라 할 때, 선분 DP 의 길이를 a, b 를 써서 나타내면?



① $\dfrac{a+b}{2}$　② $a+b$　③ $\sqrt{ab}$

④ ab　⑤ $\dfrac{2ab}{a+b}$

해설

$\overline{\mathrm{CP}}=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{2}=\dfrac{a+b}{2}$ 이고

$\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{CP}}\cdot\overline{\mathrm{DP}}$ 이므로

$ab=\dfrac{a+b}{2}\cdot\overline{\mathrm{DP}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{DP}}=\dfrac{2ab}{a+b}$

12. 점 $P(a, 0)$에서 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$에 그은 접선의 길이가 4일 때, 점 P의 좌표를 모두 구하면?

① $(1, 0)$, $(7, 0)$ ② $(-1, 0)$, $(7, 0)$ ③ $(1, 0)$, $(-7, 0)$

④ $(-1, 0)$, $(5, 0)$ ⑤ $(1, 0)$, $(-5, 0)$

해설

원의 중심을 $C(3, 2)$, 접점을 Q라 하면

$\overline{CP} = \sqrt{(a-3)^2+2^2}$

CPQ는 직각삼각형이므로

$(a-3)^2+4=2^2+4^2$

$a^2-6a-7=0$

$(a+1)(a-7)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=7$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(-1, 0)$, $(7, 0)$이다.

13. 점$P_1(1,\ 2)$를 점$P_2(-1,\ 4)$로 옮기는 평행이동에 의하여 점$(2, -2)$는 어떤 점으로 옮겨지는가?

① $(0,\ 0)$ ② $(1,\ 1)$ ③ $(4,\ 0)$

④ $(4, -4)$ ⑤ $(1,\ 2)$

해설

주어진 평행이동은 x축 방향으로 -2, y축 방향으로 $+2$만큼 평행이동하므로 $(2-2, -2+2) = (0,\ 0)$으로 이동한다.

14. 평행이동 $f : (x,\ y) \to (x+a,\ y+b)$ 에 의하여 점 $(2,\ 3)$ 은 점 $(1,\ -1)$ 로 옮겨진다. 이 때, 평행이동 f 에 의하여 원 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ 이 옮겨지는 원의 방정식은?

① $x^2+(y+2)^2=4$
② $x^2+(y-2)^2=4$
③ $(x-1)^2+y^2=4$
④ $(x+1)^2+y^2=4$
⑤ $(x-1)^2+(y+1)^2=4$

해설

$(2+a,\ 3+b)=(1,-1)$
$\therefore a=-1$, $b=-4$
$x^2+y^2-2x-4y+1=0$ 에서
$(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 이 원의 중심 $(1,\ 2)$ 는
평행이동 f 에 의하여 $(1-1,\ 2-4)=(0,\ -2)$
로 옮겨지므로
원 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ 이 옮겨지는
원의 방정식은 $x^2+(y+2)^2=4$ 이다.

15. 원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 도형이 되었다. 이때 $2m-n$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$,
즉 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$을
x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼
평행이동한 도형은 중심이 $(-1+m,\ 2+n)$이고
반지름의 길이가 1인 원이다.
이때 두 원이 직선 $y=x$에 대칭이므로
$(-1+m,\ 2+n)=(2,\ -1)$
$m=3,\ n=-3$이므로 $2m-n=9$

16. 원 $x^2+y^2-10x-8y+40=0$ 을 직선 $3x+ay+6=0$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $(x+1)^2+(y-8)^2=1$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

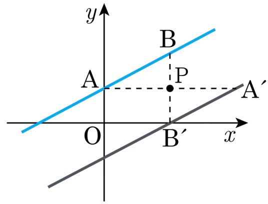
▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2+y^2-10x-8y+40=0$ 을 표준형으로 나타내면
$(x-5)^2+(y-4)^2=1 \cdots\cdots$ ㉠
㉠은 원 $(x+1)^2+(y-8)^2=1$ 과
직선 $3x+ay+6=0$ 에 대하여 대칭이므로
두 원의 중심 $(5,4)$, $(-1,\ 8)$ 을 이은 선분의
중점이 직선 $3x+ay+6=0$ 위에 있다.
두 점 $(5,4),(-1,8)$ 을 이은 선분의 중점은
$\left(\frac{5+(-1)}{2}, \frac{4+8}{2}\right)$, 즉 $(2,6)$ 이므로
$3\cdot2+a\cdot6+6=0$
$\therefore a=-2$

17. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 한 점 P 에 대한 두 점 A, B 의 대칭점은 각각 A′, B′ 이고, 직선 AB 의 방정식은 $x-2y+4=0$ 이라 한다. 점 A′ 의 좌표가 $(3, 1)$, 직선 A′B′ 의 방정식이 $y=ax+b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱은?



① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{3}$　③ $-\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{3}$

해설

두 점 A′, B′ 은 각각 점 P 에 대한 두 점 A, B 의 대칭점이므로 직선 A′B′ 은 직선 AB 의 점대칭도형이다.

즉, $\triangle APB \equiv \triangle A'PB'$ 에서

$\angle ABP = \angle A'B'P$ (엇각) 이므로

$\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{A'B'}$

따라서, 직선 A′B′ 의 기울기는 직선 AB 의 기울기인 $\frac{1}{2}$ 과 같다.

또, 직선 A′B′ 은 점 A′ $(3, 1)$ 을 지나므로 직선 A′B′ 의 방정식은

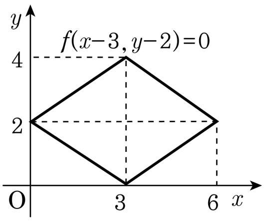
$y-1=\frac{1}{2}(x-3)$

$\therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

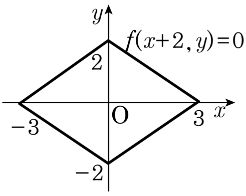
따라서, $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$ 이므로

$ab=-\frac{1}{4}$

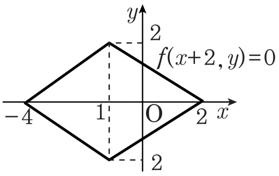
18. 방정식 $f(x-3, y-2) = 0$ 이 나타내는 도형이 다음 그림과 같을 때 방정식 $f(x+2, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?



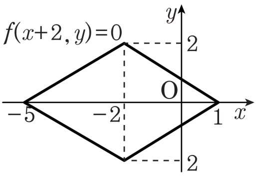
①



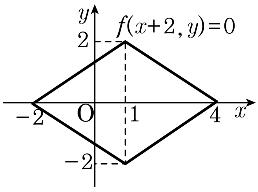
②



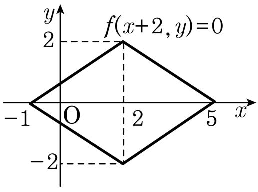
③



④

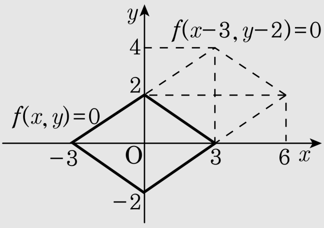


⑤

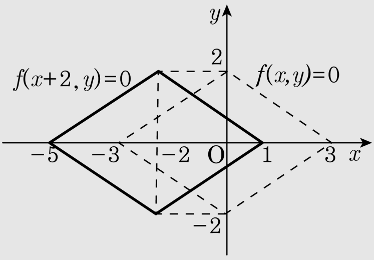


해설

주어진 $f(x-3, y-2) = 0$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면
다음 그림과 같이 $f(x, y) = 0$ 의 그래프를 얻을 수 있다.



$f(x+2, y) = 0$ 은 $f(x, y) = 0$ 을
x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.



19. 다음 중 원 $x^2+y^2+6x-6y+2=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=\dfrac{1}{3}$

② $x^2+y^2=1$

③ $x^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{5}$

④ $(x+1)^2+y^2=3$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=16$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+6x-6y+2=0$ 에서 $(x+3)^2+(y-3)^2=16$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 4인 ⑤이다.

20. 중심이 직선 $2x+y=0$ 위에 있고, 두 점 $(3,\ 0)$, $(0,\ 1)$ 을 지나는 원의 방정식은 ?

① $x^2+y^2-2x+4y-6=0$

② $x^2+y^2+2x-4y-6=0$

③ $5x^2+5y^2-8x+16y-21=0$

④ $5x^2+5y^2+8x-16y-21=0$

⑤ $x^2+y^2-4x+8y-12=0$

해설

구하는 원의 중심이 직선 $2x+y=0$ 위에 있으므로 중심을 $(a,\ -2a)$ 라 할 수 있다.

$(x-a)^2+(y+2a)^2=r^2$

점 $(3,\ 0)$ 을 지나므로,

$(3-a)^2+(2a)^2=r^2 \cdots$ ①

또, 점 $(0,\ 1)$ 을 지나므로,

$a^2+(1+2a)^2=r^2 \cdots$ ②

①, ②에서 $a=\dfrac{4}{5},\ r^2=\dfrac{37}{5}$

$$\therefore\ \left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{8}{5}\right)^2=\frac{37}{5}$$

정리하면 $5x^2+5y^2-8x+16y-21=0$

21. 두 점 $A(-2,\ 0)$, $B(2,\ 0)$ 에서의 거리의 비가 $3\ :\ 1$ 인 점의 자취위의 점 P 라 할 때, $\triangle ABP$ 의 넓이의 최댓값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\overline{AP} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$

$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$\overline{AP}\ :\ \overline{BP} = 3\ :\ 1$ 이므로

$\overline{AP} = 3\overline{BP} \rightarrow \overline{AP}^2 = 9\overline{BP}^2$

따라서, $(x+2)^2 + y^2 = 9(x-2)^2 + 9y^2$

$\rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = 9x^2 - 36x + 36 + 9y^2$

$\rightarrow 8x^2 + 8y^2 - 40x + 32 = 0$

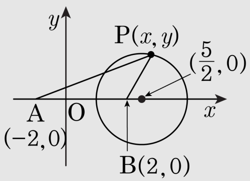
$\rightarrow x^2 + y^2 - 5x + 4 = 0$

$$\rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{25}{4} + 4 = 0$$

$$\rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

즉, 중심이 $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$ 인 원이다.



$\therefore$ 넓이 S 의 최댓값 $= \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{2} = 3$

22. 직선 $x=2$에 접하고, 원 $(x+3)^2+y^2=1$에 외접하는 원의 중심의 자취를 나타내는 식은?

① $y^2=-8x$ ② $y^2=8x$ ③ $y^2=-12x$

④ $x^2=-8y$ ⑤ $x^2=8y$

해설

구하는 원의 중심을 $\mathrm{P}(x,y)$라 놓고 x,y 사이의 관계식을 세운다.
점 P에서 직선 $x=2$에 내린 수선의 발을 B, 원$(x+3)^2+y^2=1$의 중심을 A라고 하면

$\overline{\mathrm{AP}}-1=\overline{\mathrm{BP}}$ 에서

$\sqrt{(x+3)^2+y^2}-1=2-x$

$\therefore\ y^2=-12x$

23. 두 원 $x^2+y^2=11$, $(x-5)^2+y^2=16$의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{11}$　③ 5　④ $2\sqrt{7}$　⑤ $4\sqrt{2}$

해설

두 원 $x^2+y^2=11$과 $(x-5)^2+y^2=16$의 공통현의 방정식은

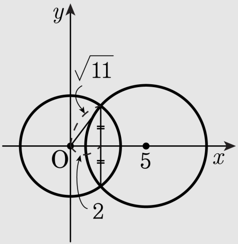
$\left(x^2+y^2-11\right)-\left(x^2-10x+y^2+9\right)=0$

$10x-20=0 \quad \therefore x=2$

원 $x^2+y^2=11$의 중심 $(0,0)$과 공통현 $x=2$사이의 거리가 2이고,

반지름의 길이가 $\sqrt{11}$이므로 공통현의 길이는

$2\times\sqrt{\left(\sqrt{11}\right)^2-2^2}=2\sqrt{7}$



24. 두 점 $A(-1, 3)$, $B(2, a)$를
지나는 직선이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 접할 때, a의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

두 점 $A(-1, 3)$, $B(2, a)$ 를

지나는 직선의 방정식은, $y - 3 = \dfrac{a-3}{3}(x+1)$

$\therefore\ (a-3)x - 3y + a + 6 = 0 \quad \cdots\cdots ㉠$

직선 ㉠이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 접하므로

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 ㉠에 이르는 거리가

원의 반지름의 길이인 1 과 같다.

$$\therefore\ \frac{|a+6|}{\sqrt{(a-3)^2+9}} = 1$$

$\therefore\ |a+6| = \sqrt{(a-3)^2+9} \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡의 양변을 제곱하면 $a^2+12a+36 = a^2-6a+9+9$,$18a = -18$

$\therefore\ a = -1$

25. 원 $x^2+y^2-2x-6y=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형에 의하여 x 축이 잘렸을 때, 잘린 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

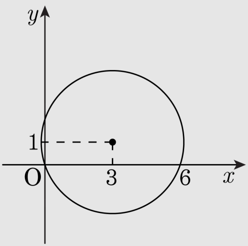
해설

원 $x^2+y^2-2x-6y=0$ 을 표준형으로 고치면,

$(x-1)^2+(y-3)^2=10$,

이 원을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면,

$(x-3)^2+(y-1)^2=10 \quad \cdots$ ㉠



㉠의 그래프는 다음 그림과 같으므로

$y=0$ 일 때의 x 의 값을 구하면

$(x-3)^2+(0-1)^2=10$ 에서

$x^2-6x=0,\ x(x-6)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=6$

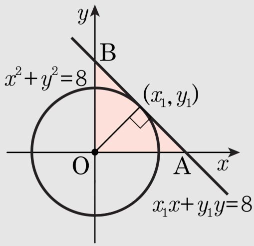
따라서 잘린 선분의 길이는 6 이다.

26. 원 $x^2+y^2=8$ 과 제1사분면에서 접하는 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, 직각삼각형 OAB 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설



제1사분면에서의 원 위의 접점을 (x_1, y_1) 이라고 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=8 \cdots\cdots$ ㉠ (단, $x_1>0, y_1>0$)

한편, 두 점 A, B 는 각각 접선 ㉠과 x 축, y 축의 교점이므로

$$\mathrm{A}\left(\frac{8}{x_1}, 0\right), \mathrm{B}\left(0, \frac{8}{y_1}\right)$$

따라서, 직각삼각형 OAB 의 넓이를 S 라고 하면

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{x_1}\cdot\frac{8}{y_1}=\frac{32}{x_1y_1}$$

이 때, (x_1, y_1) 이 원 $x^2+y^2=8$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=8$ 이고

$x_1>0, y_1>0$ 에서

$$\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\geq\sqrt{x_1^2\cdot y_1^2}=x_1y_1,\ x_1y_1\leq 4$$

$$\therefore \frac{1}{x_1y_1}\geq\frac{1}{4}\leftarrow\frac{x_1^2+y_1^2}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$$\therefore \mathrm{S}=\frac{32}{x_1y_1}\geq 32\cdot\frac{1}{4}=8$$ (단, 등호는 $x_1=y_1$ 일 때 성립)

따라서, 구하는 넓이의 최소의 값은 8 이다.

27. 점 $(1,\ -1)$에서 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$에 그은 접선은 두 개 있다. 이 때, 이 두 직선의 기울기의 합은?

① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

해설

점 $(1,\ -1)$을 지나고 기울기가 m인 접선을
$y+1=m(x-1)$, 즉 $mx-y-m-1=0$이라고 하면
원의 중심 $(-1,\ 2)$에서 접선까지의 거리는
원의 반지름 1과 같아야 한다.

따라서 $1=\dfrac{|-2m-3|}{\sqrt{m^2+1}}$,

$|-2m-3|=\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2+12m+8=0$
따라서 두 기울기의 합은 근과 계수와의 관계에 의하여 -4이다.

28. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 의 공통접선의 방정식을 구하면?

① $x=-2,\ y=-1$ ② $x=1,\ y=1$

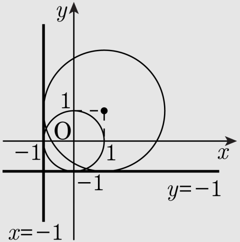
③ $x=-1,\ y=1$ ④ $x=1,\ y=-1$

⑤ $x=-1,\ y=-1$

해설

그림을 그려보면 두 개의 공통접선이 존재하고 그 식은 각각

$x=-1,\ y=-1$

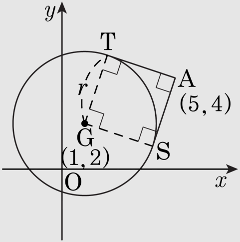


29. 좌표평면 위에 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$ 과 원 밖의 점 $\mathrm{A}(5,\ 4)$가 있다. 점 A에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r 의 값은?

① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{12}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

해설

A 에서 그은 접선이 서로 수직이면 원의 중심 G, 접점 S, T, 점 A 로 이루어지는 사각형 GSAT 는 한 변의 길이가 r 인 정사각형이다.



$$\therefore\ r=\frac{\overline{\mathrm{GA}}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(5-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{10}$$

30. 두 원 $C_1 : (x-1)^2+y^2=1$, $C_2 : (x-3)^2+y^2=1$ 에 동시에 외접하는 제1 사분면 위의 원 C_3 가 있다. 세 원의 중심을 이은 삼각형이 정삼각형이 될 때, 원점에서 원 C_3 의 중심까지의 거리를 d , 원 C_3 의 반지름의 길이를 r 라 하자. 이때, $d \times r$ 의 값은?

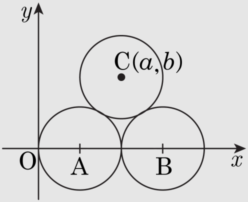
① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

세 원의 중점을 각각 A, B, C 라 하면,
두 원의 중심의 좌표가 A(1, 0), B(3, 0)
이다.
$\overline{AC}=2$ 이고 삼각형 ABC 가
정삼각형이므로 C$(a,\ b)$ 라 하면
$a=1+\overline{AC}\cos 60°$, $b=\overline{AC}\sin 60°$
$\therefore$ C$(2,\ \sqrt{3})$
따라서 원 C_3 는 중심이 $(2,\ \sqrt{3})$ 이고
반지름의 길이가 1 인 원이므로, 원점에서
원의 중심 C$(2,\ \sqrt{3})$ 까지의 거리는

$$d=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$$

$$\therefore d \times r=\sqrt{7}$$



31. 직선 $y = 3x$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동 한 직선이 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접할 때, a^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

x 축 방향으로 a 만큼 평행 이동시킨 직선

: $y = 3(x - a) \Rightarrow \quad 3x - y - 3a = 0$

원에 접하므로 중심과 직선 사이의 거리는 반지름의 길이와 같다.

$$\frac{|-3a|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = 3$$

$a = \pm\sqrt{10}$

$\therefore \ a^2 = 10$

32. 실수 x, y 가 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$ 을 만족할 때, x^2+y^2 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a+b$ 를 구하면?

① $2\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{13}$ ③ $2\sqrt{17}$ ④ 16 ⑤ 28

해설

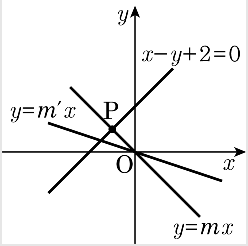
$x^2+y^2=k$ 인 원을 생각해보면,
두 원이 외접할 때 k 가 최소, 내접할 때 k 가 최대가 된다.
$\Rightarrow$ 외접 : 중심사이의 거리 = 반지름의 합
$\Rightarrow$ $\sqrt{3^2+2^2}=1+\sqrt{k}$ $\therefore$ $k=(\sqrt{13}-1)^2$
$\Rightarrow$ 내접 : 중심사이의 거리 = 반지름의 차
$\Rightarrow$ $\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{k}-1$ $\therefore$ $k=(\sqrt{13}+1)^2$
$\therefore$ k 의 합은 $(\sqrt{13}-1)^2+(\sqrt{13}+1)^2=28$

33. 직선 $y=0$ 을 직선 $y=mx$ 에 대하여 대칭이동시킨 직선과 $x-y+2=0$ 과의 교점을 P 라 할 때 $\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최솟값은? (단, O 는 원점이다.)

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

직선 $y=0$ 을 직선 $y=mx$ 에 대하여 대칭 이동시킨 직선을 $y=m'x$ 이라 할 때
$y=m'x$ 와 $x-y+2=0$ 의 교점을 P 라 하면
$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최솟값은 원점에서 직선 $x-y+2=0$ 에 이르는 거리와 같다.



따라서 $\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최솟값은 $\dfrac{|2|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$ 이다.