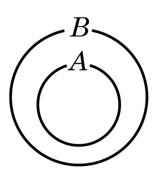
1. 두 집합 $A, B$ 사이의 포함관계가 다음 벤 다이어그램과 같이 나타나는 것을 모두 골라라.




㉠ $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$

㉡ $A = \{8, 16, 24, \cdots\}$, $B = \left\{x | x\text{는 } 4\text{의 배수}\right\}$

㉢ $A = \left\{x | x\text{는 홀수}\right\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

㉣ $A = \varnothing$, $B = \{0\}$

㉤ $A = \left\{x | x\text{는 } 10\text{의 약수}\right\}$,
$B = \left\{x | x\text{는 } 10\text{보다 작은 자연수}\right\}$

▶ 답：

▶ 답：

▷ 정답： ㉡

▷ 정답： ㉣

해설

주어진 벤 다이어그램은 $A \subset B$
㉠ $A \not\subset B$
㉡ $B = \{4, 8, 12, 16 \cdots\}$ 이므로 $A \subset B$
㉢ $A = \{1, 3, 5, \cdots\}$ 이므로 $B \subset A$
㉣ $\varnothing$ 는 모든 집합의 부분집합이므로 $A \subset B$
㉤ $A = \{1, 2, 5, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, \cdots, 9\}$ 이므로 $A \not\subset B$

**2.** 부분집합에 대한 설명으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 모든 집합은 자기 자신을 부분집합으로 한다.

② 공집합은 모든 집합의 부분집합이다.

③ $A \subset B$ , $B \subset A$ 인 집합 $A, B$ 는 존재하지 않는다.

④ 공집합은 $\{0\}$ 의 부분집합이다.

⑤ $\{1, 3, 5\}$ 는 $\{x \mid x$는 5 미만인 홀수$\}$ 의 부분집합이 아니다.

해설

$A \subset B$ , $B \subset A$ 는 $A = B$ 를 의미하며 이를 만족하는 집합은 무수히 많이 존재한다.

**3.** <보기> 의 집합의 포함 관계 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

**보기**

㉠ $\varnothing \subset \varnothing$

㉡ $A \subset \varnothing$이면 $A = \varnothing$

㉢ $A \subset B$이고 $C \subset B$이면 $A = C$

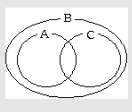
㉣ $A \not\subset B$이고 $B \not\subset C$이면 $A \not\subset C$

㉤ $A \subset B$, $B \subset C$, $C \subset D$이면 $A \subset D$

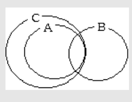
① ㉠, ㉡, ㉢　② ㉠, ㉢, ㉣　③ ㉠, ㉡, ㉤
④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉢, ㉣, ㉤

**해설**

㉠ $\varnothing \subset \varnothing$ 는 옳다. (참)
㉡ $\varnothing \subset A$ 이므로 $A \subset \varnothing$ 이면 $A = \varnothing$ 이다. (참)
㉢ 먼저 $B$ 를 그린 다음, $A \subset B$이고 $C \subset B$ 이도록 $A$ 와 $C$ 를 그렸을 때 항상 $A = C$ 인지 알아보면 그림1에서 그렇지 않음을 알 수 있다. (거짓)




㉣ 먼저 $B$ 를 그린 다음, $A \not\subset B$이고 $B \not\subset C$ 이도록 $A$ 와 $C$ 를 그렸을 때 항상 $A \not\subset C$ 인지 알아보면 다음 그림에서 그렇기 않음을 알 수 있다. (거짓)




㉤ 조건에서 $A \subset B, B \subset C$ 이므로 $A \subset C$ 이고 조건에서 $C \subset D$ 이므로 $A \subset D$ 이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉤이다.

**4.** 집합 $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 2 의 배수를 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 28 개

해설

집합 $A$ 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$ ( 개) 이고, 이 중에서 2 의 배수를 원소로 하나도 갖지 않는 부분집합은 원소 3, 5 로 만든 부분집합이므로 $2^2 = 4$ ( 개) 이다.

$\therefore\ 32 - 4 = 28$ ( 개)

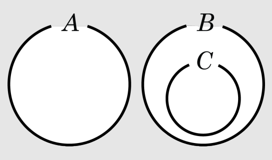
**5.** 집합 $A$와 $B$가 서로소이고 $C \subset B$일 때, 다음 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면?

① $A \cap C = \varnothing$　② $A \cap C = C$　③ $A \cup C = A$

④ $B \cup C = B$　⑤ $\{\{1\}, 1\} \subset A$

해설

$A \cap B = \varnothing$ , $C \subset B$ $\therefore A \cap C = \varnothing, B \cup C = B$



**6.** 두 명제 '여름이 오면 덥다.', '더우면 비가 온다.' 가 모두 참일 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 없는 것을 모두 고르면?

① 덥지 않으면 여름이 오지 않는다.

② 여름이 오면 비가 온다.

③ 비가 오면 여름이 온다.

④ 비가 오지 않으면 여름이 오진 않는다.

⑤ 더우면 여름이 온다.

해설

세 명제 '여름이 온다.', '덥다.', '비가 온다.' 를 각각 $p$, $q$, $r$ 로 놓으면 $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ 이므로 $p \Rightarrow r$ 명제가 참이면 그 대우 역시 참이므로 $\sim q \Rightarrow \sim p$, $\sim r \Rightarrow \sim q$, $\sim r \Rightarrow \sim p$ 그러나 어떤 명제가 참이라고 해서 역과 이가 반드시 참인 것은 아니다. 따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ③, ⑤이다.

**7.** 다음은 '$a$, $b$, $c$ 가 자연수일 때, $a^2 + b^2 = c^2$ 이면 $a, b$ 중 적어도 하나는 3의 배수이다.' 임을 증명한 것이다.

| |
|---|
| $a, b$ 가 모두 ( 가 ) 가 아니라고 가정하면, $a = 3m \pm 1, b = 3n \pm 1$ (단, $m, n$ 은 자연수) 로 놓을 수 있다. 이 때, $a^2 + b^2 = 3M +$(나) (단, $M$ 은 자연수) $\cdots$ ㉠<br>또, $c = 3l$, $3l \pm 1$ (단, $l$ 은 자연수) 라 하면, $c^2 = 3M'$ 또는 $c^2 = 3M'' +$(다) (단, $M', M''$ 은 자연수) 가 되어 ㉠의 $3M +$(나) 의 꼴로는 쓸 수 없다. 따라서, 모순이므로 $a, b$ 중 적어도 하나는 3의 배수이어야 한다. |

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 차례로 적으면?

① 자연수, 1, 2
② 자연수, 2, 1
③ 3 의 배수, 1, 2
④ 3 의 배수, 2, 1
⑤ 3 의 배수, 2, 2

해설

$a, b$가 모두 3 의 배수가 아니라고 가정하면
$a = 3m \pm 1$ , $b = 3n \pm 1$ (단, $m, n$ 은 자연수) 로 놓을 수 있다.
이 때, $a^2 + b^2 = (3m \pm 1)^2 + (3n \pm 1)^2 = 3\{3(m^2 + n^2) \pm 2(m + n)\} + 2$
$= 3M + 2$ (단, $M$은 자연수) $\cdots\cdots$ ㉠
한편, $c = 3l$ , $3l \pm 1$ (단, $l$ 은 자연수) 로 놓을 수 있으므로
$c^2 = 9l^2$ 또는 $c^2 = (3l \pm 1)^2 = 3(3l^2 \pm 2l) + 1$
즉, $c^2 = 3M'$ 또는 $c^2 = 3M + 1$ (단, $M', M$ 은 자연수) 의 꼴이 되어 ㉠의 $3M + 2$ 의 꼴로 쓸 수 없다. 따라서, 모순이므로 $a, b$ 중 적어도 하나는 3의 배수이다.

**8.** $x \geq a$가 $-1 < x < 1$의 필요조건이 되기 위한 $a$의 최댓값을 구하면 ?

① $-1$　② $-\frac{1}{2}$　③ $-2$　④ $-\frac{3}{2}$　⑤ $-5$

해설

$\{x \mid -1 < x < 1\} \subset \{x \mid x \geq a\}$이어야 하므로 $a \leq -1$
따라서, $a$의 최댓값은 $-1$이다.

**9.** 실수 $x$, $y$에 대하여 $3x+4y=5$일 때, $x^2+y^2$의 최솟값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 6　　⑤ 8

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해
$(3^2+4^2)(x^2+y^2) \geq (3x+4y)^2$
$25(x^2+y^2) \geq 25$
$\therefore\ x^2+y^2 \geq 1$

해설

$3x+4y=5$에서

$y=\frac{1}{4}(5-3x)$

$x^2+y^2=x^2+\frac{1}{16}(3x-5)^2$

$=x^2+\frac{1}{16}(9x^2-30x+25)$

$=\frac{25}{16}x^2-\frac{30}{16}x+\frac{25}{16}$

$=\frac{25}{16}\left(x^2-\frac{6}{5}x+\left(\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)+\frac{25}{16}$

$=\frac{25}{16}\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{25}{16}$

$=\frac{25}{16}\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+1$

**10.** 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서

$$f(x)=\begin{cases}-x+1 & (x\geq 1)\\ 2x-a & (x\leq 1)\end{cases}$$ 로 정의될 때,

$f(2-\sqrt{3})-f(\sqrt{3})$의 값은?

① $3-3\sqrt{3}$　② $2-2\sqrt{3}$　③ $1-\sqrt{3}$

④ $-1+\sqrt{3}$　⑤ $-3+3\sqrt{3}$

해설

$x=1$에서 함숫값이 1개이어야 하므로

$-1+1=2-a$

$\therefore\ a=2$

$2-\sqrt{3}<1,\ \ \sqrt{3}>1$이므로

$f(2-\sqrt{3})=2(2-\sqrt{3})-2=-2\sqrt{3}+2$

$f(\sqrt{3})=-\sqrt{3}+1$

$\therefore\ f(2-\sqrt{3})-f(\sqrt{3})=-2\sqrt{3}+2-(-\sqrt{3}+1)=1-\sqrt{3}$

**11.** 다음 보기의 함수 중에서 일대일 대응인 것은 모두 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = -x^2 + 1$

㉡ $g(x) = -x + 1$

㉢ $h(x) = x^3$

㉣ $i(x) = 2$

㉤ $j(x) = |2x - 1| \quad (x \geq 1)$

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

일대일 대응이란 정의역이 $x$ 에 치역 $y$ 가
하나씩 대응 될 때를 말한다.
㉠, ㉣ 일대일 대응이 아니다.
㉡ 함수가 아니다.
따라서 일대일 대응인 것은 ㉡, ㉢, ㉤ 3개이다.

**12.** $f(x)=2x+3$ 일 때, $g(x)$ 가 $(g\circ f)^{-1}(x)=2x$ 를 만족시킨다고 한다. 이때 $g(1)$ 의 값은?

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$(g\circ f)^{-1}(x)=2x$ 이므로 $(g\circ f)(x)=\frac{1}{2}x$

따라서 $g(f(x))=\frac{1}{2}x$

$f(x)=2x+3=1$ 에서 $x=-1$ 이므로

$\therefore\ g(f(-1))=g(1)=\ -\frac{1}{2}$

**13.** 분수식 $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\dfrac{x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}\cdots$ ①

①에서 분자를 $x$에 관하여 정리하면

$x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)$

$=(z-y)x^2-(z^2-y^2)x+yz^2-y^2z$

$=(z-y)x^2-(z+y)(z-y)x+zy(z-y)$

$=(z-y)\{x^2-(z+y)x+zy\}$

$=(z-y)(x-z)(x-y)=(x-y)(y-z)(z-x)$

$\therefore$ (준식) $=\dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1$

**14.** $x+y=6,\ xy=4$(단, $x>y$) 일 때, $\dfrac{x^3-y^3}{x^3+y^3}$ 의 값은?

① $\dfrac{2\sqrt{5}}{9}$ ② $\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{5}$

해설

$x+y=6,\ xy=4\ (x>y)$ 이면

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=36-16=20$

$\therefore\ x-y=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\ (\because\ x>y)$

$$(\text{준 식})=\frac{(x-y)^3+3xy(x-y)}{(x+y)^3-3xy(x+y)}$$

$$=\frac{\sqrt{20}^3+3\cdot4\cdot\sqrt{20}}{6^3-3\cdot4\cdot6}$$

$$=\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

**15.** $x+y=\dfrac{y+z}{2}=\dfrac{z+x}{5}$ 일 때, $\dfrac{7(x^2+y^2-z^2)}{xy-yz+zx}$ 의 값은?

① $-3$　② $-4$　③ $-5$　④ $-6$　⑤ $-7$

해설

$x+y=\dfrac{y+z}{2}=\dfrac{z+x}{5}=k$

$x+y=k\ \cdots$①

$y+z=2k\ \cdots$②

$z+x=5k\cdots$③

세식을 더해 정리하면 $x+y+z=4k\cdots$④

④에서 ①, ②, ③을 각각 빼면

$x=2k,\ y=-k,\ z=3k$

$\therefore \dfrac{7(x^2+y^2-z^2)}{xy-yz+zx}=\dfrac{7(4k^2+k^2-9k^2)}{-2k^2+3k^2+6k^2}=-4$

**16.** $\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-4}} = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-4}}$ 가 성립하지 않는 $x$ 값 중에서 정수의 개수는?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$x-2>0$ 이고 $x-4<0$

$\therefore\ 2<x<4$

따라서 정수인 $x$ 는 3 뿐이므로 1 개이다.

**17.** $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$의 정수 부분을 $a$, 소수 부분을 $b$라고 할 때, $\frac{1}{b}-a$의 값은?

① $1-\sqrt{3}$　② $1+\sqrt{3}$　③ $2-\sqrt{3}$
④ $2+\sqrt{3}$　⑤ $3+\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{12-6\sqrt{3}}=\sqrt{12-2\sqrt{27}}=3-\sqrt{3}$
$1<\sqrt{3}<2,\ -2<-\sqrt{3}<-1,\ 1<3-\sqrt{3}<2$
$a=1,\quad b=2-\sqrt{3}$
$\therefore \frac{1}{b}-a=\frac{1}{2-\sqrt{3}}-1=2+\sqrt{3}-1=\sqrt{3}+1$

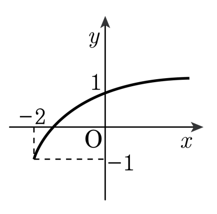
**18.** 분수함수 $y = \frac{ax-1}{x+b}$ 의 점근선이 $x = -2$ , $y = 3$ 일 때, 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}$ 의 정의역은? (단, $a, b$ 는 상수)

① $\{x \mid x \le -3\}$ ② $\left\{x \mid x \le -\frac{2}{3}\right\}$ ③ $\left\{x \mid x \ge -\frac{2}{3}\right\}$
④ $\left\{x \mid x \ge \frac{2}{3}\right\}$ ⑤ $\{x \mid x \ge 3\}$

해설

$y = \frac{-ab-1}{x+b} + a$ 이므로
점근선은 $x = -b$ , $y = a \therefore a = 3, b = 2$
$y = \sqrt{3x+2}$ 의 정의역은 $\left\{x \mid x \ge -\frac{2}{3}\right\}$ 이다.

**19.** 함수 $y = a\sqrt{x+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프와 $x$축의 교점의 좌표는? (단, $a,\ b,\ c$ 는 상수)




① $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$　　② $\left(-\frac{4}{3},\ 0\right)$

③ $\left(-\frac{5}{3},\ 0\right)$　　④ $(-\sqrt{2},\ 0)$

⑤ $(-\sqrt{3},\ 0)$

해설

함수 $y = a\sqrt{x+b}+c$ 의 그래프는
함수 $y = a\sqrt{x}$ 의 그래프를
$x$축의 방향으로 $-b$ 만큼, $y$축의 방향으로
$c$만큼 평행 이동시킨 것이므로
$b = 2$ , $c = -1$
$\therefore\ y = a\sqrt{x+b}+c = a\sqrt{x+2}-1$
한편, 이 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나므로
$1 = a\sqrt{0+2}-1$
$\therefore\ a = \sqrt{2}$
따라서, 함수 $y = \sqrt{2}\sqrt{x+2}-1$ 의 그래프와
$x$축의 교점의 $x$좌표를 구하면
$0 = \sqrt{2}\sqrt{x+2}-1$

$$\sqrt{x+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x+2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ x = -\frac{3}{2}$$

**20.** 무리함수 $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{8-x}$ 의 최댓값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{8-x}$ 에서
$x \geq 0,\ 8-x \geq 0$ 이므로
정의역은 $\{x \mid 0 \leq x \leq 8\}$, $f(x) \geq 0$ 이므로
$\{f(x)\}^2$ 이 최대일 때 $f(x)$ 도 최대이고
$\{f(x)\}^2 = x + 2\sqrt{8x-x^2} + 8 - x = 8 + 2\sqrt{8x-x^2}$
이때, $y = 8x - x^2 = -(x-4)^2 + 16$ 이므로
$0 \leq x \leq 8$ 에서 $x = 4$ 일 때 최댓값 16을 가진다.
따라서 $x = 4$ 일 때 $\{f(x)\}^2$ 은
최댓값 16을 가지므로
$f(x)$ 의 최댓값은 4이다.

**21.** 공집합이 아닌 두 집합 $A$, $B$ 에 대하여 $A \times B = \{(x,\ y) \mid x \in A,\ y \in B\}$ 라고 정의하자. 집합 $A = \{2, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 5\}$, $C = \{2, 3, 4\}$ 일 때, $n((A \times B) \cap (A \times C))$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$A \times B = \{(2,\ 1), (2,\ 5), (3,\ 1), (3,\ 5), (5,\ 1), (5,\ 5), (6,\ 1), (6,\ 5)\}$

$A \times C = \{(2,\ 2), (2,\ 3), (2,\ 4), (3,\ 2), (3,\ 3), (3,\ 4), (5,\ 2), (5,\ 3), (5,\ 4), (6,\ 2), (6,\ 3), (6,\ 4)\}$

$\therefore\ (A \times B) \cap (A \times C) = \varnothing$

따라서 $n((A \times B) \cap (A \times C)) = 0$

**22.** 자연수를 원소로 하는 두 집합 $A = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6\}$, $B = \{a_k + b | a_k \in A\}$가 있다. $A \cap B = \{4,\ 7,\ 9\}$이고, 집합 $A$의 원소의 합이 32, $A \cup B$의 원소의 합이 62일 때, 집합 $B$의 원소 중 가장 큰 수와 작은 수의 차를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$A \cap B$의 원소의 합에서 집합 $A$의 원소의 합을 빼고,
$A \cup B$의 원소의 합을 더해 주면
집합 $B$의 원소의 합이 되므로, 집합 $B$의 원소의 합은 50이다.
집합 $A$의 원소의 합이
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 32$이고,
$B = \{a_1 + b,\ a_2 + b,\ a_3 + b,\ a_4 + b,\ a_5 + b,\ a_6 + b\}$이므로
집합 $B$의 원소의 합은
$a_1 + b + a_2 + b + a_3 + b + a_4 + b + a_5 + b + a_6 + b = 32 + 6b$
$32 + 6b = 50$ 이므로 $b = 3$이 된다.
교집합의 원소인 $4, 7, 9$는 집합 $A$와 $B$의 원소이므로 각각 3을 더한 7, 10, 12도 집합 $B$의 원소가 된다.
또 집합 $B$의 원소의 합이 50이므로 4, 7, 9, 10, 12와 8이 된다.
$\therefore B = \{4,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12\}$

**23.** 전체집합 $U = \left\{x | x\text{는 한 자리 자연수}\right\}$ 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ , $A^c = \{6,\ 7,\ 8,\ 9\}$, $A^c \cap B^c = \{7,\ 9\}$ 일 때, $(A - B)^c$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$A = U - A^c = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로
$A - B = \{1, 3, 5\}$
$\therefore (A - B)^c = \{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$

**24.** 두 집합 $A$, $B$ 에 대하여 $n(A-B)=20$, $n(A^c\cap B)=12$, $n(A\cup B)=48$ 일 때, $n(A\cap B)$ 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$A^c\cap B=B-A$

$n(A\cup B)=n(A-B)+n(A\cap B)+n(A^c\cap B)$

$48=20+n(A\cap B)+12$

$\therefore\ n(A\cap B)=16$

**25.** $x > -1$일 때 $x + \frac{1}{x+1}$의 최솟값을 $m$, 그 때의 $x$의 값을 $k$라 할 때 $m + k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x + 1 > 0$이므로 $x + \frac{1}{x+1} = x + 1 + \frac{1}{x+1} - 1 \geq 2\sqrt{(x+1)\frac{1}{x+1}} - 1 = 1$

$\therefore m = 1$

이 때 등호는

$x + 1 = \frac{1}{x+1}$에서 $x = 0, -2$

$x > -1$이므로 등호는 $x = 0$일 때만 성립한다.

$\therefore\ k = 0$

$\therefore\ m + k = 1$