1. 연립부등식 $\begin{cases} 2x+3 > -3+x \\ 5x+1 \le 3x-1 \end{cases}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-6 < x \le -1$

해설

$\begin{cases} 2x+3 > -3+x \\ 5x+1 \le 3x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -6 \\ x \le -1 \end{cases}$

$\therefore -6 < x \le -1$

2. 이차방정식 $x^2+ax-a-7=0$의 두 근이 모두 정수일 때, 상수 a의 값이 아닌 것은?

① -7　② -3　③ -1　④ 1　⑤ 3

해설

이차방정식의 두 근을 α , β $(\alpha \le \beta)$라 하면
근과 계수와의 관계에서
$\alpha+\beta=-a \cdots\cdots$ ①
$\alpha\beta=-a-7 \cdots\cdots$ ②
② − ① 에서 $\alpha\beta-(\alpha+\beta)=-7$
$\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=-6$, $(\alpha-1)(\beta-1)=-6$
α , β 가 정수이므로 $\alpha-1$, $\beta-1$은 -6의 약수이다.
$\therefore (\alpha-1, \beta-1)=(-6,1),(-3,2),(-2,3),(-1,6)$
$\therefore (\alpha, \beta)=(-5,2),(-2,3),(-1,4),(0,7)$
$a=-\alpha-\beta$이므로
이 때, $a=3$, -1 , -3 , -7

3. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$일 때, 부등식 $4cx^2-2bx+a>0$을 만족시키는 x의 값의 범위를 구하면?

① $-7<x<-5$　② $-5<x<-3$　③ $-3<x<-1$
④ $5<x<7$　⑤ $7<x<9$

해설

$ax^2+bx+c>0$의 해가

$\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$이므로 $a<0$

$\left(x-\frac{1}{14}\right)\left(x-\frac{1}{10}\right)<0$에서

$(14x-1)(10x-1)<0$

$\therefore\ -140x^2+24x-1>0$

$a=-140k,\ b=24k,\ c=-k$라 놓고

(단, $k>0 \leftarrow a<0$)

$4cx^2-2bx+a>0$에 대입하면

$-4kx^2-2\cdot 24kx-140k>0$

$x^2+12x+35<0$

$\therefore\ (x+7)(x+5)<0\quad \therefore -7<x<-5$

4. 이차방정식 $x^2 - 2(m-4)x + 2m = 0$ 의 근에 대하여 다음 조건을 만족하도록 실수 m 의 값의 범위를 차례로 정한 것은 보기 중 어느 것인가?

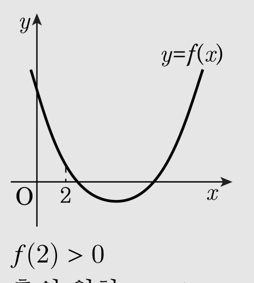
보기

(i) 두 근이 모두 2보다 크다.
(ii) 2가 두 근 사이에 있다.

① $8 \le m < 10$, $m > 10$　② $8 \le m < 10$, $m > 8$
③ $-10 \le m < 10$, $m > 10$　④ $-10 \le m < 10$, $m > 8$
⑤ $8 \le m < 10$, $m > 12$

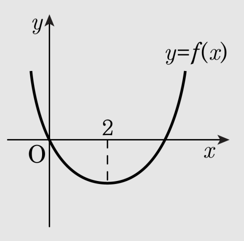
해설

(i) 경계값 $x = 2$ 에서



$f(2) > 0$
축의 위치 $m - 4 > 2$
판별식 $D \ge 0$
$\therefore\ 8 \le m < 10$

(ii)



$f(2) < 0$ 이기만 하면 된다.
$\therefore\ m > 10$

5. 유리수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여 $(\sqrt{2}+i)^4 + a(\sqrt{2}+i)^3 + b(\sqrt{2}+i)^2 + c(\sqrt{2}+i) + d = 0$을 만족한다. 이 때, $a-b-c-d$의 값은? (단, $i^2 = -1$)

① -7　　② 3　　③ 1　　④ -1

해설

$(\sqrt{2}+i)^4 = -7+4\sqrt{2}i$, $(\sqrt{2}+i)^3 = -\sqrt{2}+5i$,

$(\sqrt{2}+i)^2 = 1+2\sqrt{2}i$

$(-7+4\sqrt{2}i)+a(-\sqrt{2}+5i)$

$+b(1+2\sqrt{2}i)+c(\sqrt{2}+i)+d=0$

$(-7-\sqrt{2}a+b+\sqrt{2}c+d)$

$+(4\sqrt{2}+5a+2\sqrt{2}b+c)i=0$

$\therefore\ (-7+b+d)+(c-a)\sqrt{2}=0,$

$(5a+c)+(4+2b)\sqrt{2}=0$

$a,\ b,\ c,\ d$ 는 유리수이므로 $-7+b+d=0$:

$c-a=0,\ 5a+c=0,\ 4+2b=0$

$\therefore\ a=0,\ b=-2,\ c=0,\ d=9$

$\therefore\ a-b-c-d=-7$

6. 함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ 의 그래프와 $g(x) = 3x - 4$ 의 그래프가 서로 다른 세 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 에서 만난다고 한다. 이 때 $y_1 + y_2 + y_3$ 의 값은?

① -6　② -5　③ -4　④ -3　⑤ -2

해설

x_1, x_2, x_3 는 방정식 $x^3 - 2x^2 + ax + b = 3x - 4$
즉 $x^3 - 2x^2 + (a-3)x + b + 4 = 0$ 의 세 근 $x_1 + x_2 + x_3 = 2$
이 때, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 는
직선 $y = 3x - 4$ 위의 점이므로
$y_1 = 3x_1 - 4, y_2 = 3x_2 - 4, y_3 = 3x_3 - 4$

$$\begin{aligned} \therefore y_1 + y_2 + y_3 &= 3(x_1 + x_2 + x_3) - 12 \\ &= 3 \cdot 2 - 12 \\ &= -6 \end{aligned}$$

7. $(1-x-x^2)^{50} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{99}x^{99} + a_{100}x^{100}$ 라 할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{100} = A$, $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99} = B$에 대하여 $A + 2B$의 값을 구하면?

① -1　② 0　③ 1　④ 100　⑤ 1024

해설

(i) 양변에 $x = 1$을 대입하면

$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{99} + a_{100} \cdots$ ㉠

양변에 $x = -1$을 대입하면

$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{99} + a_{100} \cdots$ ㉡

(ii) ㉠+㉡ 하면 $2 = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{100})$

$\therefore\ a_0 + a_2 + \cdots + a_{100} = 1$

$\therefore\ A = 1$

㉠ − ㉡하면

$0 = 2(a_1 + a_3 + \cdots + a_{99})$

$a_1 + a_3 + \cdots + a_{99} = 0 \quad \therefore\ B = 0$

$\therefore\ A + 2B = 1$

8. 방정식 $x^{11}=1$ 의 10개의 허근을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{10}$ 이라 할 때, $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdots(\alpha_{10}+1)$ 의 값은?

① 1　　② -1　　③ i　　④ $-i$　　⑤ 10

해설

$x^{11}-1=(x-1)(x^{10}+x^9+\cdots+x+1)$ 이므로 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{10}$ 은 방정식 $x^{10}+x^9+\cdots+x+1=0$ 의 10개의 근이다.
$\therefore\ x^{10}+x^9+\cdots+x+1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{10})$ 위 식은 항등식이므로
$x=-1$ 을 대입하면 $1-1+1-\cdots-1+1=(-1-\alpha_1)(-1-\alpha_2)\cdots(-1-\alpha_{10})$
$\therefore (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_{10}+1)=1$

9. 한 근이 $1+\sqrt{3}i$ 인 방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 과 방정식 $x^2+ax+2=0$ 이 오직 한 개의 공통 실근을 가질 때, $a-b+c$ 의 값은? (단, a, b, c 는 실수)

① -14　② -13　③ -12　④ -11　⑤ -9

해설

$1+\sqrt{3}i$가 근이므로 $1-\sqrt{3}i$ 도 근이다. 이때, 또 한 근을 α 라 하면 근과 계수 관계에서

$(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)+\alpha=-a \cdots\cdots$ ㉠

$(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)\alpha+(1-\sqrt{3}i)\alpha=b \cdots\cdots$ ㉡

$(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)\alpha=-c \cdots\cdots$ ㉢

또, 방정식 $x^2+ax+2=0$ 과의 공통근이 α 이므로

$\alpha^2+a\alpha+2=0 \cdots\cdots$ ㉣

㉠에서 $\alpha=-a-2$ 를 ㉣에 대입하면

$(-a-2)^2+a(-a-2)+2=0$

$\therefore a=-3,\ \alpha=1$

㉡에서 $b=2\alpha+4=6$

㉢에서 $c=-4\alpha=-4$

$\therefore\ a-b+c=-3-6-4=-13$

10. 두 방정식 $x^2+x-p=0$, $x^2-3x-q=0$ 의 각각의 한 근은 반올림하면 1 이 된다고 한다. 이 때, $p-q$ 값의 범위는?

① $2 < p-q < 5$ ② $3 \le p-q < 5$ ③ $3 < p-q \le 6$
④ $5 \le p-q \le 6$ ⑤ $2 \le p-q < 6$

해설

$f(x) = x^2+x-p$, $g(x) = x^2-3x-q$ 라 하면 방정식 $f(x) = 0$ 과 $g(x) = 0$ 이 $\frac{1}{2}$ 이상 $\frac{3}{2}$ 미만인 근을 가져야 한다.

(i) $f(x) = x^2+x-p$ 의 그래프의 대칭축은 직선 $x = -\frac{1}{2}$ 이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) - p \le 0$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right) - p > 0$

$\therefore \frac{3}{4} \le p < \frac{15}{4}$ ……㉠

(ii) $g(x) = x^2-3x-q$ 의 그래프의 대칭축은 직선 $x = \frac{3}{2}$ 이므로

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} - q \ge 0$

$g\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} - q < 0$

$\therefore -\frac{9}{4} < q \le -\frac{5}{4}$ ……㉡

㉠ − ㉡에서 $2 \le p-q < 6$