

1. 연립부등식 $\begin{cases} 2x + 3 > -3 + x \\ 5x + 1 \leq 3x - 1 \end{cases}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $-6 < x \leq -1$

해설

$$\begin{cases} 2x + 3 > -3 + x \\ 5x + 1 \leq 3x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -6 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$$\therefore -6 < x \leq -1$$

2. 이차방정식 $x^2 + ax - a - 7 = 0$ 의 두 근이 모두 정수일 때, 상수 a 의 값이 아닌 것은?

① -7

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

이차방정식의 두 근을 α, β ($\alpha \leq \beta$)라 하면
근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta = -a \cdots \cdots ①$$

$$\alpha\beta = -a - 7 \cdots \cdots ②$$

$$② - ① \text{에서 } \alpha\beta - (\alpha + \beta) = -7$$

$$\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = -6, (\alpha - 1)(\beta - 1) = -6$$

α, β 가 정수이므로 $\alpha - 1, \beta - 1$ 은 -6의 약수이다.

$$\therefore (\alpha - 1, \beta - 1) = (-6, 1), (-3, 2), (-2, 3), (-1, 6)$$

$$\therefore (\alpha, \beta) = (-5, 2), (-2, 3), (-1, 4), (0, 7)$$

$$a = -\alpha - \beta \text{이므로}$$

이 때, $a = 3, -1, -3, -7$

3. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $\frac{1}{14} < x < \frac{1}{10}$ 일 때, 부등식 $4cx^2 - 2bx + a > 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위를 구하면?

① $-7 < x < -5$

② $-5 < x < -3$

③ $-3 < x < -1$

④ $5 < x < 7$

⑤ $7 < x < 9$

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가

$$\frac{1}{14} < x < \frac{1}{10} \text{ 이므로 } a < 0$$

$$\left(x - \frac{1}{14}\right) \left(x - \frac{1}{10}\right) < 0 \text{ 에서}$$

$$(14x - 1)(10x - 1) < 0$$

$$\therefore -140x^2 + 24x - 1 > 0$$

$$a = -140k, b = 24k, c = -k \text{ 라 놓고}$$

$$(\text{단, } k > 0 \leftarrow a < 0)$$

$$4cx^2 - 2bx + a > 0 \text{ 에 대입하면}$$

$$-4kx^2 - 2 \cdot 24kx - 140k > 0$$

$$x^2 + 12x + 35 < 0$$

$$\therefore (x + 7)(x + 5) < 0 \quad \therefore -7 < x < -5$$

4. 이차방정식 $x^2 - 2(m-4)x + 2m = 0$ 의 근에 대하여 다음 조건을 만족하도록 실수 m 의 값의 범위를 차례로 정한 것은 보기 중 어느 것인가?

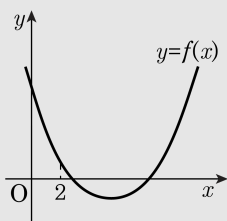
보기

- (i) 두 근이 모두 2보다 크다.
(ii) 2가 두 근 사이에 있다.

- ① $8 \leq m < 10, m > 10$ ② $8 \leq m < 10, m > 8$
③ $-10 \leq m < 10, m > 10$ ④ $-10 \leq m < 10, m > 8$
⑤ $8 \leq m < 10, m > 12$

해설

- (i) 경계값 $x = 2$ 에서



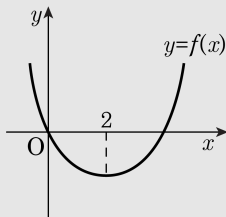
$$f(2) > 0$$

$$\text{축의 위치 } m - 4 > 2$$

$$\text{판별식 } D \geq 0$$

$$\therefore 8 \leq m < 10$$

- (ii)



$$f(2) < 0 \text{ 이기만 하면 된다.}$$

$$\therefore m > 10$$

5. 유리수 a, b, c, d 에 대하여 $(\sqrt{2} + i)^4 + a(\sqrt{2} + i)^3 + b(\sqrt{2} + i)^2 + c(\sqrt{2} + i) + d = 0$ 을 만족한다. 이 때, $a - b - c - d$ 의 값은? (단, $i^2 = -1$)

① -7

② 3

③ 1

④ -1

해설

$$(\sqrt{2} + i)^4 = -7 + 4\sqrt{2}i, (\sqrt{2} + i)^3 = -\sqrt{2} + 5i,$$

$$(\sqrt{2} + i)^2 = 1 + 2\sqrt{2}i$$

$$(-7 + 4\sqrt{2}i) + a(-\sqrt{2} + 5i)$$

$$+ b(1 + 2\sqrt{2}i) + c(\sqrt{2} + i) + d = 0$$

$$(-7 - \sqrt{2}a + b + \sqrt{2}c + d)$$

$$+ (4\sqrt{2} + 5a + 2\sqrt{2}b + c)i = 0$$

$$\therefore (-7 + b + d) + (c - a)\sqrt{2} = 0,$$

$$(5a + c) + (4 + 2b)\sqrt{2} = 0$$

a, b, c, d 는 유리수이므로 $-7 + b + d = 0$:

$$c - a = 0, 5a + c = 0, 4 + 2b = 0$$

$$\therefore a = 0, b = -2, c = 0, d = 9$$

$$\therefore a - b - c - d = -7$$

6. 함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ 의 그래프와 $g(x) = 3x - 4$ 의 그래프가 서로 다른 세 점 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) 에서 만난다고 한다. 이 때 $y_1 + y_2 + y_3$ 의 값은?

① -6

② -5

③ -4

④ -3

⑤ -2

해설

x_1, x_2, x_3 는 방정식 $x^3 - 2x^2 + ax + b = 3x - 4$

즉 $x^3 - 2x^2 + (a - 3)x + b + 4 = 0$ 의 세 근 $x_1 + x_2 + x_3 = 2$

이 때, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 는

직선 $y = 3x - 4$ 위의 점이므로

$$y_1 = 3x_1 - 4, y_2 = 3x_2 - 4, y_3 = 3x_3 - 4$$

$$\therefore y_1 + y_2 + y_3 = 3(x_1 + x_2 + x_3) - 12$$

$$= 3 \cdot 2 - 12$$

$$= -6$$

7. $(1 - x - x^2)^{50} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{99}x^{99} + a_{100}x^{100}$ 라 할 때,
 $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{100} = A$, $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99} = B$ 에 대하여
 $A + 2B$ 의 값을 구하면?

① -1

② 0

③ 1

④ 100

⑤ 1024

해설

(i) 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{99} + a_{100} \cdots \textcircled{㉠}$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{99} + a_{100} \cdots \textcircled{㉡}$$

(ii) $\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 하면 $2 = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{100})$

$$\therefore a_0 + a_2 + \cdots + a_{100} = 1$$

$$\therefore A = 1$$

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 하면

$$0 = 2(a_1 + a_3 + \cdots + a_{99})$$

$$a_1 + a_3 + \cdots + a_{99} = 0 \quad \therefore B = 0$$

$$\therefore A + 2B = 1$$

8. 방정식 $x^{11} = 1$ 의 10개의 허근을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{10}$ 이라 할 때, $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \cdots (\alpha_{10} + 1)$ 의 값은?

① 1

② -1

③ i

④ $-i$

⑤ 10

해설

$x^{11} - 1 = (x - 1)(x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1)$ 이므로 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{10}$ 은 방정식 $x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1 = 0$ 의 10개의 근이다.

$\therefore x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{10})$ 위 식은 항등식이므로

$x = -1$ 을 대입하면 $1 - 1 + 1 - \cdots - 1 + 1 = (-1 - \alpha_1)(-1 - \alpha_2) \cdots (-1 - \alpha_{10})$

$\therefore (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_{10} + 1) = 1$

9. 한 근이 $1 + \sqrt{3}i$ 인 방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 과 방정식 $x^2 + ax + 2 = 0$ 이 오직 한 개의 공통 실근을 가질 때, $a - b + c$ 의 값은? (단, a, b, c 는 실수)

① -14

② -13

③ -12

④ -11

⑤ -9

해설

$1 + \sqrt{3}i$ 가 근이므로 $1 - \sqrt{3}i$ 도 근이다. 이때, 또 한 근을 α 라 하면 근과 계수 관계에서

$$(1 + \sqrt{3}i) + (1 - \sqrt{3}i) + \alpha = -a \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i) + (1 + \sqrt{3}i)\alpha + (1 - \sqrt{3}i)\alpha = b \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)\alpha = -c \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

또, 방정식 $x^2 + ax + 2 = 0$ 과의 공통근이 α 이므로

$$\alpha^2 + a\alpha + 2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

㉠에서 $\alpha = -a - 2$ 를 ㉣에 대입하면

$$(-a - 2)^2 + a(-a - 2) + 2 = 0$$

$$\therefore a = -3, \alpha = 1$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } b = 2\alpha + 4 = 6$$

$$\textcircled{㉢} \text{에서 } c = -4\alpha = -4$$

$$\therefore a - b + c = -3 - 6 - 4 = -13$$

10. 두 방정식 $x^2+x-p=0$, $x^2-3x-q=0$ 의 각각의 한 근은 반올림하면 1 이 된다고 한다. 이 때, $p-q$ 값의 범위는?

- ① $2 < p-q < 5$ ② $3 \leq p-q < 5$ ③ $3 < p-q \leq 6$
 ④ $5 \leq p-q \leq 6$ ⑤ $2 \leq p-q < 6$

해설

$f(x) = x^2 + x - p$, $g(x) = x^2 - 3x - q$ 라 하면 방정식 $f(x) = 0$ 과 $g(x) = 0$ 이 $\frac{1}{2}$ 이상 $\frac{3}{2}$ 미만인 근을 가져야 한다.

(i) $f(x) = x^2 + x - p$ 의 그래프의 대칭축은 직선 $x = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) - p \leq 0$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right) - p > 0$$

$$\therefore \frac{3}{4} \leq p < \frac{15}{4} \quad \dots\dots\textcircled{\text{㉠}}$$

(ii) $g(x) = x^2 - 3x - q$ 의 그래프의 대칭축은 직선 $x = \frac{3}{2}$ 이므로

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} - q \geq 0$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} - q < 0$$

$$\therefore -\frac{9}{4} < q \leq -\frac{5}{4} \quad \dots\dots\textcircled{\text{㉡}}$$

㉠ - ㉡ 에서 $2 \leq p-q < 6$