1. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $i^2 = -1$

② $x^2 = -4$ 를 만족하는 실수는 존재하지 않는다.

③ $\sqrt{-9} = 3i$

④ 2는 복소수이다.

⑤ $a + bi$ 에서 $b = 0$ 이면 실수이다. (단, a, b 는 실수)

해설

④ $2 = 2 + 0 \cdot i$ 이므로 복소수이다.

2. 실수 k에 대하여 복소수 $z = 3(k+2i) - k(1-i)^2$의 값이 순허수가 되도록 k의 값을 정하면?

① -2　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$z = 3(k+2i) - k(-2i)$

$= 3k + (6+2k)i \Rightarrow$ 순허수

$\therefore\ 3k = 0,\ k = 0$

3. $x+y+(2x-y)i=1+5i$를 만족하는 두 실수 $x,\ y$에 대하여, $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x+y=1,\ 2x-y=5$

$\therefore\ x=2,\ y=-1$

4. $\dfrac{2+3i}{3-i}$ 를 계산하면?

① $\dfrac{3+11i}{8}$ ② $\dfrac{9+11i}{8}$ ③ $\dfrac{3+9i}{10}$
④ $\dfrac{3+11i}{10}$ ⑤ $\dfrac{9+11i}{10}$

해설

$$\frac{2+3i}{3-i} = \frac{(2+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{6-3+11i}{10} = \frac{3+11i}{10}$$

5. 복소수에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 찾으면?

① $2+i$의 허수 부분은 $2i$ 이다.

② $-5i$는 순허수이다.

③ i^3 은 허수이다.

④ $1+\sqrt{3}i$의 켤레복소수는 $1-\sqrt{3}i$이다.

⑤ $1-\dfrac{1}{i}$는 실수이다.

해설

① $2+i$ 의 허수부분 : i (×)
② $-5i$ 는 순허수 (○)
③ $i^3=-i$ 허수(○)
④ $\overline{1+\sqrt{3}i}=1-\sqrt{3}i$ (○)
⑤ $1-\dfrac{1}{i}=1+i$ 복소수 (×)

6. 복소수 $z=(2+i)a^2+(1+4i)a+2(2i-3)$이 순허수일 때, 실수 a의 값은?

① -2 ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$z=(2a^2+a-6)+(a^2+4a+4)i$
순허수이므로 $2a^2+a-6=0$
$\Rightarrow \quad (a+2)(2a-3)=0$
$\Leftrightarrow \ a=-2$ 또는 $a=\frac{3}{2}$
그런데 $a=2$이면,
$a^2+4a+4=0$이 되어 순허수가 성립되지 않는다.
$\therefore \quad a=\frac{3}{2}$

7. $(1+i)x^2+2(1+2i)x-3+3i$ 가 순허수일 때, x 의 값은?

① 0 ② 1 ③ -3 ④ 1, 3 ⑤ -1

해설

$(1+i)x^2+2(1+2i)x-3+3i$
$=x^2+x^2i+2x+4xi-3+3i$
$=(x^2+2x-3)+(x^2+4x+3)i$
순허수를 만족하려면 실수부$=0$, 허수부$\neq 0$이어야 한다.
$x^2+2x-3=0$이면서, $x^2+4x+3\neq 0$인 x값을 찾아야 한다.
$\therefore x=1$

8. 등식 $\left(\frac{2+i}{1+\sqrt{2}i}\right)\left(\frac{1-4i}{1-\sqrt{2}i}\right)=a+bi$ 를 만족하는 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $a-3b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a-3b=9$

해설

$$(\text{좌변})=\frac{(2+i)(1-4i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}$$

$$=\frac{2-8i+i-4i^2}{1-2i^2}$$

$$=\frac{6-7i}{3}=2-\frac{7}{3}i \text{ 이므로}$$

$2-\frac{7}{3}i=a+bi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=2,\ b=-\frac{7}{3}$

$\therefore\ a-3b=2-3\times\left(-\frac{7}{3}\right)=2+7=9$

9. $i^{2000}+i^{2002}+i^{2003}+i^{2004}$ 의 값을 구하면?

① 1 ② $1-i$ ③ $1+i$ ④ -1 ⑤ 0

해설

$i^4=1$ 이므로

$i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i$

(준식) $=1+(-1)+(-i)+1$

$=1-i$

10. $i+2i^2+3i^3+\cdots+50i^{50}$ 의 값은?

① $-26-25i$　② $-26+25i$　③ 0
④ $-25+26i$　⑤ $25+26i$

해설

$i+2i^2+3i^3+\cdots+50i^{50}$
$=\{i+2\cdot(-1)+3\cdot(-i)+4\cdot1\}+\{5i+6\cdot(-1)+7\cdot(-i)+8\cdot1\}+\cdots+\{45i+46\cdot(-1)+47\cdot(-i)+48\cdot1\}+49i+50\cdot(-1)$
$12(2-2i)+49i-50=-26+25i$

11. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3)\cdot(-3)} = \sqrt{9} = 3$
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5\times(-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\dfrac{2}{-6}} = \sqrt{-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

① Ⅰ, Ⅱ　② Ⅰ, Ⅲ　③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅱ, Ⅳ　⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$
∴ 옳지 않다.
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$
∴ 옳다.
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\dfrac{2}{6}}\cdot\dfrac{i}{i^2} = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
∴ 옳지 않다.
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$
∴ 옳다.

12. $z=(1+i)x^2+(2-i)x-8-2i$에 대하여 $z^2<0$을 만족하는 실수 x의 값을 구하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① -4　② -2　③ 2　④ 4　⑤ 6

해설

$z=(x^2+2x-8)+(x^2-x-2)i$
$=(x-2)(x+4)+(x+1)(x-2)i$
그런데, $z^2<0$에서 z는 순허수이므로
$\therefore\ x=-4$

13. 등식 $(x^2 - 3x + 1) + (y^2 - 1)i = -1 + 3i$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 xy의 최댓값은?

① -4　　② -2　　③ -1　　④ 2　　⑤ 4

해설

실수부와 허수부로 나누어 생각한다.

$\therefore\ x^2 - 3x + 1 = -1 \quad y^2 - 1 = 3$

$x = 1$ 또는 $2y = \pm 2$

$\therefore\ (xy$의 최댓값$) = 4$

14. n이 홀수일 때, $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n+1}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{4n+1}$을 간단히 하면?

① $-2i$　　② $-i$　　③ $2i$　　④ i　　⑤ 0

해설

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{2i}{2}=i$

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{-2i}{2}=-i$

$i^{2n+1}+(-i)^{4n+1}$ ($n=2k-1$ 대입)

$i^{2(2k-1)+1}+(-i)^{4(2k-1)+1}$

$=i^{4k-1}-i$

$=-i-i=-2i$

15. $A=\dfrac{1-i}{1+i}$ 일 때, $1+A+A^2+A^3+\ \cdots\ +A^{2005}$ 의 값은?

① $-i$ ② 1 ③ 0 ④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$A=\dfrac{1-i}{1+i}=-i$

$1+A+A^2+A^3+\ A^4+\cdots+A^{2005}$

$=1+\{(-i)+(-1)+i+1\}+\cdots+(-i)$

$=1-i$

16. α,β 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면? (단, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$)

보기

㉠ $\alpha = \overline{\beta}$ 이면 $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

㉡ $\alpha = \overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$ 이다.

① ㉠　② ㉠,㉡　③ ㉡,㉢
④ ㉠,㉢　⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

$\alpha = a + bi \Rightarrow \overline{\beta} = a + bi$

㉠ $\alpha+\beta = (a+bi)+(a-bi) = 2a$ 는 실수 (T), $\alpha\beta = a^2+b^2 =$ 실수

㉡ $\alpha\beta = a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0$
$\therefore \alpha = 0$ (T)

㉢ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$ 일 때, $\alpha^2 + \beta^2 = 0$

17. $z = 1 + i$ 일 때, $\dfrac{\bar{z}-1}{z} - \dfrac{z-1}{\bar{z}}$ 의 값을 구하면?

① $-i$　② i　③ $-2i$　④ $2i$　⑤ $3i$

해설

$\bar{z} = 1 - i$

$$\begin{aligned}\frac{\bar{z}-1}{z} - \frac{z-1}{\bar{z}} &= \frac{-i}{1+i} - \frac{i}{1-i} \\ &= -\frac{2i}{(1+i)(1-i)} \\ &= -i\end{aligned}$$

18. 복소수 z의 켤레복소수가 $\bar{z}$일 때, $(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$ 를 만족시키는 복소수 z 는?

① 존재하지 않는다.
② 단 한 개 있다.
③ 두 개 뿐이다.
④ 세 개 뿐이다.
⑤ 무수히 많다.

해설

$z=a+bi$ 라 하면 $\bar{z}=a-bi$ (단, $a,\ b$ 는 실수)

$(2+3i)(a+bi)+(2-3i)(a-bi)=2$

$2a+2bi+3ai-3b+2a-2bi-3ai-3b=2$

$4a-6b=2 \qquad \therefore\ 2a-3b=1$

$2a-3b=1$ 을 만족하는 실수 $a,\ b$ 의 순서쌍은 무수히 많으므로 주어진 조건을 만족하는 복소수 z 는 무수히 많다.

19. $z = \dfrac{-2}{1+\sqrt{3}i}$ 일 때, $z^4 - \bar{z}$ 의 값을 구하면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\sqrt{3}i$　　② $-\sqrt{3}i$　　③ $2\sqrt{3}i$

④ $-2\sqrt{3}i$　　⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} z &= \frac{-2}{1+\sqrt{3}i} \\ &= \frac{-2(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} \\ &= \frac{-2(1-\sqrt{3}i)}{4} \\ &= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

$\therefore\ 2z+1 = \sqrt{3}i \cdots$ ①

①의 양변을 제곱하여 정리하면

$4z^2+4z+1=-3 \Leftrightarrow z^2+z+1=0 \cdots$ ②

②의 양변에 $z-1$을 곱해주면

$(z-1)(z^2+z+1)=0 \Leftrightarrow z^3=1$

$\therefore\ z^3=1$ 이므로 $z^4=z$

$$\begin{aligned} \therefore z^4-\bar{z} &= z-\bar{z} \\ &= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \\ &= \sqrt{3}i \end{aligned}$$

20. 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{-2}-\frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$ 을 간단히 하여 $a+bi$ 의 꼴로 나타낼 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12\sqrt{2}$

해설

$\sqrt{-3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{-2}-\frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$

$=(\sqrt{-3}\times\sqrt{2})\times(\sqrt{3}\times\sqrt{-2})-\frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$

$=\sqrt{-6}\times\sqrt{-6}-\sqrt{-2}-\sqrt{-2}$

$=-\sqrt{36}-\sqrt{2}i-\sqrt{2}i=-6-2\sqrt{2}i$

$\therefore\ ab=12\sqrt{2}$

21. 정수 n에 대해 $z = i^n + i^{-n}, i = \sqrt{-1}$을 만족하는 z의 개수는?

① 1개　　② 2개　　③ 3개

④ 4개　　⑤ 4개보다 많다.

해설

정수 n 에 대하여 $i^n = i$ 또는 -1 또는 $-i$ 또는 1,
$i^n = i$ 이면 $i^{-n} = -i$, $i^n = -1$ 이면
$i^{-n} = -1$, $i^n = -i$ 이면
$i^{-n} = i$, $i^n = 1$ 이면
$i^{-n} = 1$
$\therefore\ i^n + i^{-n} = 0, -2, 0, 2$
$\therefore\ z$는 3개다.

22. 복소수들 사이의 연산 $*$가 다음과 같다고 하자.

$\alpha * \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta i$

이 때, $(1+2i) * z = 1$을 만족시키는 복소수 z는?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $-1+i$

④ $-1-i$ ⑤ i

해설

$z = a + bi$라 하면

$(1+2i) * z$

$= (1+2i) + (a+bi) + (1+2i)(a+bi)i$

$= (-a-b+1) + (a-b+2)i = 1$

$-a-b+1 = 1,\ a-b+2 = 0$

$a = -1,\ b = 1$

$\therefore\ z = -1+i$

23. 복소수 $z=a+bi,\ w=b+ai$ ($a,\ b$는 $ab\neq 0$ 인 실수, $i=\sqrt{-1}$)에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? (단, $\bar{z},\ \overline{w}$ 는 각각 $z,\ w$ 의 켤레복소수이다.)

① $i\bar{z}=w$ ② $\dfrac{\overline{w}}{\bar{z}}=\dfrac{z}{w}$

③ $z\cdot\overline{w}=\bar{z}\cdot w$ ④ $z\cdot\bar{z}=w\cdot\overline{w}$

⑤ $i(\bar{z}+\overline{w})=z+w$

해설

① : $i\bar{z}=i(a-bi)=b+ai=w$

② :①에서 $\bar{z}=-iw$ ⋯⋯ ㉠

같은 방법으로 $\overline{w}=-iz$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 대입하면 $\dfrac{\overline{w}}{\bar{z}}=\dfrac{-iz}{-iw}=\dfrac{z}{w}$

③ :㉠, ㉡을 대입하면

(좌변) $=z\cdot(-iz)=-iz^2$,

(우변) $=(-iw)\cdot w=-iw^2$

∴ 좌변≠우변

④ : ②에서 $z\cdot\bar{z}=w\cdot\overline{w}$

⑤ : $i(\bar{z}+\overline{w})=i\bar{z}+i\overline{w}=w+z=z+w$

24. 복소수 $z = a + bi$ $(a, b$: 실수$)$ 에 대하여 $< z >= b + ai$로 나타낸다.
$z = \dfrac{4+3i}{5}$ 일 때, $5z^5 < z >^4$ 의 값을 구하면?

① $3+4i$　　② $4+3i$　　③ $5+4i$

④ $5+3i$　　⑤ $4+5i$

해설

$z < z >= (a+bi)(b+ai) = (a^2+b^2)i$

$z = \dfrac{4+3i}{5}$ 이므로

$z < z >= \left\{ \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 \right\} i = i$

$$\begin{aligned} \therefore\ 5z^5 < z >^4 &= 5z(z < z >)^4 \\ &= 5\left(\frac{4+3i}{5}\right)(i)^4 \\ &= 4+3i \end{aligned}$$

25. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

㉠ $\alpha^2+\alpha+1=0$
㉡ $1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{15}=1$
㉢ $z=\dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}$ 일 때, $z\bar{z}=\dfrac{7}{3}$

① ㉠ ② ㉠ , ㉡ ③ ㉠ , ㉢
④ ㉡ , ㉢ ⑤ ㉠ , ㉡ , ㉢

해설

㉠ :$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $2\alpha+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2+\alpha+1=0$

㉡ :$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$, $\alpha^3=1$

$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{15}$

$=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3(1+\alpha+\alpha^2)+\cdots+\alpha^{15}=\alpha^{15}$

$=(\alpha^3)^5=1$ ($\because \alpha^2+\alpha+1=0$)

㉢ :$\overline{\alpha} = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\alpha+\overline{\alpha}=-1, \alpha\overline{\alpha}=1$

$z=\dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}$, $\bar{z}=\dfrac{\overline{\alpha}+3}{2\overline{\alpha}+1}$

$z\bar{z}=\dfrac{\alpha\overline{\alpha}+3(\alpha+\overline{\alpha})+9}{4\alpha\overline{\alpha}+2(\alpha+\overline{\alpha})+1}=\dfrac{1-3+9}{4-2+1}=\dfrac{7}{3}$

해설

㉢ 이 성립함을 다음과 같이 직접 계산할 수 있다.

$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\Rightarrow 2\alpha+1=\sqrt{3}i, \alpha+3=\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore \dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}=\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i}$

$=-\dfrac{5i-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$z\cdot\bar{z}=\dfrac{\sqrt{3}-5i}{2\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3}+5i}{2\sqrt{3}}=\dfrac{7}{3}$