

1. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 과 중심이 같고 점 $(5, -3)$ 을 지나는 원의 방정식을 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 이라고 할 때, $a + b + r$ 의 값은?
(단, a, b, r 은 상수)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$
 $\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$
 $\therefore$ 중심은 $(2, 1)$ 이다.
 $\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = r^2$
 $(5, -3)$ 을 지나므로 대입하면,
 $(5 - 2)^2 + (-3 - 1)^2 = r^2 \quad r = 5$
 $\therefore a + b + r = 2 + 1 + 5 = 8$

2. 두 원 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ 의 위치관계 중 옳은 것은?
- ① 서로 외부에 있다
 - ② 외접한다
 - ③ 두 점에서 만난다
 - ④ 내접한다
 - ⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다

해설

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 을 정리하면

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ 을 정리하면

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$$

$$\sqrt{3 - 1^2 + (4 - 1)^2} < 5 - 1$$

따라서 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

3. 두 원 $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 8 = 0$, $x^2 + y^2 - 4y = 0$ 의 공통현의 방정식은?

① $x - 5y + 4 = 0$

② $4x - 3y + 4 = 0$

③ $3x - 3y + 4 = 0$

④ $x - y + 4 = 0$

⑤ $2x - y + 1 = 0$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 8 - (x^2 + y^2 - 4y) = 0$$

$$2x - 2y + 8 = 0$$

$$\therefore x - y + 4 = 0$$

4. 집합 A 는 2, 3, 5, 7을 원소로 가질 때, 다음 중 틀린 것을 모두 고르면?
(정답 2개)

① $1 \notin A$ ② $2 \in A$ ③ $6 \notin A$ ④ $9 \in A$ ⑤ $3 \notin A$

해설

a 가 집합 A 의 원소이면 $a \in A$, b 가 A 의 원소가 아니면 $b \notin A$ 이다.

④ $9 \notin A$

⑤ $3 \in A$

5. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}$, $B = \{a, b, \{c, \varnothing\}\}$ 일 때, $n(A) + n(B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로
 $n(A) = 4$ 이고, $n(B) = 3$ 이므로 $n(A) + n(B) = 7$ 이다.

6. 집합 $A = \{1, 2, \{1, 2\}, \emptyset\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\emptyset \in A$

② $\emptyset \subset A$

③ $\{1, 2\} \subset A$

④ $\{1, 2\} \in A$

⑤ $\{2\} \in A$

해설

$\{2\} \subset A$

7. 두 집합 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{4, 8, 10\}$ 에 대하여 $(A \cup B) - (A \cap B)$ 는?

① $\{2\}$

② $\{4\}$

③ $\{2, 4\}$

④ $\{2, 6\}$

⑤ $\{2, 4, 6\}$

해설

$(A \cup B) - (A \cap B) = \{2, 4, 6, 8, 10\} - \{4, 8, 10\} = \{2, 6\}$ 이다.

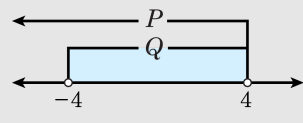
8. $x < 4$ 는 $-4 < x < 4$ 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$p : x < 4, q : -4 < x < 4$ 라고 하면



$\therefore Q \subset P$

9. 점 $(3, 0)$ 을 지나고 x 축과 직선 $y = x$ 에 동시에 접하는 원의 중심이 제1 사분면 위에 있을 때, 이 원의 반지름의 길이는?

- ① $-1 + \sqrt{2}$ ② $-2 + 2\sqrt{2}$ ③ $-3 + 3\sqrt{2}$
④ $-2 + 3\sqrt{2}$ ⑤ $-3 + 4\sqrt{2}$

해설

원이 점 $(3, 0)$ 을 지나고 x 축에 접하고,
중심이 제1 사분면 위에 있으므로
구하는 원의 방정식을
 $(x - 3)^2 + (y - b)^2 = b^2$ ($b > 0$) 으로 놓을 수 있다.
이때, 이 원과 직선 $y = x$ 도 접하므로
원의 중심 $(3, b)$ 에서
직선 $x - y = 0$ 에 이르는 거리는
원의 반지름의 길이 b 와 같다.
즉, $\frac{|3 - b|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = b, |3 - b| = \sqrt{2}b$
양변을 제곱하면
 $9 - 6b + b^2 = 2b^2, b^2 + 6b - 9 = 0$
 $\therefore b = -3 \pm 3\sqrt{2}$
그런데 $b > 0$ 이므로
 $b = -3 + 3\sqrt{2}$

10. 점 $(-1, 2)$ 를 지나고 x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식을 구하면?

- ㉠ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 또는 $(x+5)^2 + (y-5)^2 = 25$
 ㉡ $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$ 또는 $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 16$
 ㉢ $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 3$ 또는 $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$
 ㉣ $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 4$ 또는 $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$
 ㉤ $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5$ 또는 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$

해설

점 $(-1, 2)$ 를 지나고 x 축과 y 축에 동시에 접하려면 오른쪽 그림과 같이 원의 중심이 제2사분면에 있어야 한다.

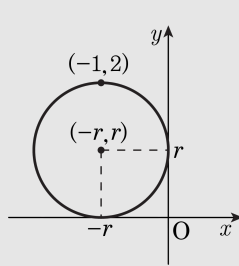
따라서, 반지름의 길이를 r 라고 하면 원의 중심은 $(-r, r)$ 이므로

구하는 원의 방정식을 $(x+r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 으로 놓을 수 있다.

이 때, 이 원이 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$(-1+r)^2 + (2-r)^2 = r^2, \quad r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$\therefore r = 1 \text{ 또는 } r = 5$$

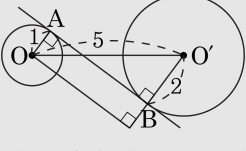


11. 반지름의 길이가 각각 1, 2인 두 원 O, O'의 중심거리가 5일 때, 두 원의 공통내접선의 길이는?

- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 7

해설

주어진 두 원의 그래프를 다음 그림과 같이 나타내면 $\overline{AB}$ 가 공통내접선이 된다.



점 O에서 선분 O'B의 연장선 위에 내린 수선의 발을 H라 하면
 $\overline{AO} = \overline{BH} = 1$
 $\therefore \overline{O'H} = 1 + 2 = 3$
이때, 두 원의 중심거리가 5이므로 $\triangle OHO'$ 에서 피타고라스의 정리에 의하여
 $\overline{AB} = \overline{OH} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

12. 직선 $y = mx + 3$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 와 서로 만나지 않을 때, m 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$

② $-2\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}$

③ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$

④ $m \leq -2\sqrt{2}, m \geq 2\sqrt{2}$

⑤ $m < -3\sqrt{2}, m > 3\sqrt{2}$

해설

원과 직선이 서로 만나지 않으려면 원의 중심부터 직선까지 거리가 반지름보다 커야 한다.

$$\therefore \frac{|m \times 0 + (-1) \times 0 + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1$$

$$\Rightarrow m^2 + 1 < 9$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$$

13. $x^2 + y^2 = 1$ 일 때, $2x + y$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

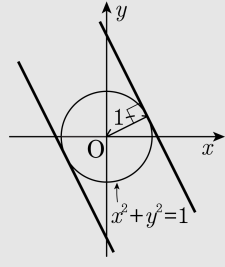
▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 $\sqrt{5}$

▷ 정답 : 최솟값 $-\sqrt{5}$

해설



구하는 $2x + y = k$ 라 하면 $y = -2x + k$ 에서 k 는 기울기가 -2 인 직선의 y 절편이다.

주어진 조건을 만족할 때, 직선은 다음 그림과 같이 존재하므로

점과 직선사이의 거리에서 $\frac{|k|}{\sqrt{5}} \leq 1$

$\therefore -5 \leq k \leq \sqrt{5}$

14. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 19개

해설

직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면
원의 중심에서 직선까지의 거리(d) 보다
원의 반지름 (r) 이 크다.

$$d = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|a|}{5} < 2 = r$$

$$\frac{|a|}{5} < 2, |a| < 10, -10 < a < 10$$

$a = -9, -8, -7, -6, \dots, 6, 7, 8, 9 \therefore 19 \text{ 개}$

15. 직선 $y = x + 4$ 가 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

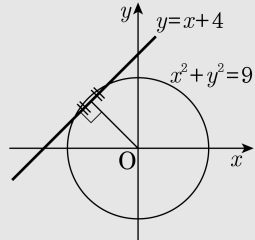
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x - y + 4 = 0$

이므로 $\frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분하므로 피타고라스 정리에서 ,

현의 길이는 $2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2$

16. 점 $(1, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접선을 그을 때 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

원의 중심과 점 $(1, 3)$ 사이의 거리는 $\sqrt{10}$ 이므로
피타고라스의 정리에 의해 접선의 길이는 $\sqrt{10 - 1} = 3$

17. 원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 4)$ 에서의 접선의 방정식이 $y = mx + n$ 일 때, $3m + n$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(-3, 4)$ 을 지나는 방정식 : $y = m(x+3) + 4$
원에 접하므로 원 중심에서 직선까지 거리는
반지름과 같다.

$$\Rightarrow \frac{|m \times (-2) - 1 \times 1 + 3m + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow (m+3)^2 = 10m^2 + 10$$

$$\Rightarrow (3m-1)^2 = 0, m = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{접선의 방정식은 } y = \frac{1}{3}x + 5 \Rightarrow 3m + n = 6$$

18. 직선 $3x - 4y - 12 = 0$ 에 수직이고 원 $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$ 에 접하는 접선의 방정식을 구하면?

- ① $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$ 또는 $y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{3}$
- ② $y = -2x - \frac{4}{3}$ 또는 $y = -\frac{4}{5}x - 1$
- ③ $y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ 또는 $y = -\frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$
- ④ $y = -\frac{6}{5}x - \frac{2}{3}$ 또는 $y = -\frac{4}{7}x - \frac{9}{2}$
- ⑤ $y = -4x - 3$ 또는 $y = -9x - 6$

해설

$3x - 4y - 12 = 0$ 에서
 $y = \frac{3}{4}x - 3 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
이 때, 구하는 접선이 $\textcircled{㉠}$ 과 수직이므로
기울기가 $-\frac{4}{3}$ 인 직선의 방정식은
 $y = -\frac{4}{3}x + b \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
로 놓을 수 있다.
 $\textcircled{㉡}$ 에서 $4x + 3y - 3b = 0$ 이고,
원의 중심 $(-3, 2)$ 에서 이 직선까지의 거리가
반지름의 길이와 같으므로
 $\frac{|-12 + 6 - 3b|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 1, |3b + 6| = 5, 3b + 6 = \pm 5$
 $3b = -1$ 또는 $3b = -11$
 $\therefore b = -\frac{1}{3}$ 또는 $b = -\frac{11}{3}$
이것을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
 $y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ 또는 $y = -\frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$

해설

$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$
 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 0$ 이므로
 $\textcircled{㉡}$ 을 이 식에 대입하여 정리하면
 $25x^2 + 6(17 - 4b)x + 9(b^2 - 4b + 12) = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면
 $\frac{D}{4} = \{3(17 - 4b)\}^2 - 25 \cdot 9(b^2 - 4b + 12) = 0$
 $D = 0$ 에서 $9b^2 + 36b + 11 = 0,$
 $(3b + 1)(3b + 11) = 0$
 $\therefore b = -\frac{1}{3}$ 또는 $b = -\frac{11}{3}$ 이것을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면
구하는 접선의 방정식은
 $y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ 또는 $y = -\frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$

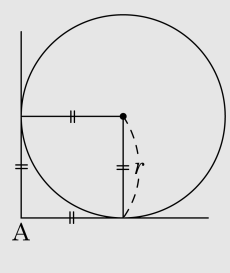
19. 좌표평면 위에 원 $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = r^2$ 과 원 밖의 점 A(2, 1)이 있다. 점 A 에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r 의 값은?

- ① 3 ② $\sqrt{10}$ ③ $\sqrt{11}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

해설

두 접선이 서로 수직이면 그림처럼 한 변이 r 인 정사각형이 된다.
따라서 원 중심에서 A까지의 거리는 $\sqrt{2}r$ 이 된다.

$\therefore \sqrt{(5-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{2}r$
 $\therefore r = 3$



20. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 위의 점 P에 대하여 선분 OP의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$$

OP의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 OP $\sqrt{4^2 + 3^2} + 2 = 7$

21. 이차방정식 $x^2 + y^2 = 2|x|$ 과 $x^2 + y^2 = 2|x+y|$ 의 공통근의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 5 개

해설

$$x^2 + y^2 = 2 |x| \cdots \textcircled{7}$$

$$x^2 + y^2 = 2 |x + y| \cdots \textcircled{L}$$

㉠)과 ㉡)에서 $2 \mid x \Rightarrow 2 \mid x + y$

$$\therefore x + y = \pm x$$

$$\therefore y = 0 \text{ 또는 } y = -2x \cdots \textcircled{C}$$

㉠과 ㉡의 교점의 개수는 다음 그림

에서 5개이다.

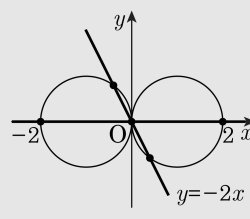
실제로, 교점을 구하면

$(0, 0), (\pm 2, 0),$

$$\left(\pm \frac{2}{5}, \mp \frac{4}{5}\right)$$

(복부호동순)

(복부호동순)



22. 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$ 에 의하여 점(3, 5)가 점(8, 20)으로 이동했다고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 12

② 14

③ 16

④ 18

⑤ 20

해설

점(3, 5)가 점(8, 20)으로 이동하려면 x 축 방향으로 +5, y 축 방향으로 +15만큼 평행이동 해야 한다. 따라서 $a = 5$, $b = 15$

23. 원 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ 를 원 $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 5$ 로 옮기는
평행이동에 의하여 직선 $x+3y+2=0$ 은 직선 $x+ay+b=0$ 으로
 옮겨진다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=2$

해설

원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동과 일치하므로
주어진 두 원의 중심의 좌표를 구하면
 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5 \rightarrow$ 원의 중심 : (2,3)
 $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 5 \rightarrow$ 원의 중심 : (-1,5)
점 (-1, 5) 는 점 (2,3) 을 x 축의 방향으로
-3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행 이동한 것이다.
따라서 직선 $x+3y+2=0$ 을 x 축의 방향으로
-3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $(x+3)+3(y-2)+2=0$
 $\therefore x+3y-1=0 \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 이 $x+ay+b=0$ 과 일치하므로
 $a=3, b=-1 \therefore a+b=2$

24. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 직선 $y = x + 3$ 과 접하게 될 때, 양수 m 의 값을 구하면?

① $2\sqrt{2} + 1$

② $\sqrt{2} + 1$

③ $\sqrt{2}$

④ $\sqrt{2} - 1$

⑤ $2\sqrt{2} - 1$

해설

$x^2 + y^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼,

y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면

$$(x - m)^2 + (y - 2)^2 = 1 \dots\dots\textcircled{1}$$

①이 직선 $x - y + 3 = 0$ 과 접하므로

점 $(m, 2)$ 와 직선 $x - y + 3 = 0$ 사이의 거리가 1 이다.

$$\frac{|m - 2 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 1$$

이것을 풀면 $m = -1 \pm \sqrt{2}$

$\therefore m = -1 + \sqrt{2}$ ($\because m > 0$)

25. 직선 l 을 x 축의 양의 방향으로 2 만큼, y 축의 양의 방향으로 -1 만큼 평행이동 시켰더니 $x - 2y - 1 = 0$ 와 겹쳤다. 직선 l 의 방정식은?

- ① $x + y - 1 = 0$ ② $x - 2y + 3 = 0$ ③ $2x + y - 1 = 0$
④ $x - y + 5 = 0$ ⑤ $x - 2y + 7 = 0$

해설

거꾸로 $x - 2y - 1 = 0$ 을 x 축으로 -2 , y 축으로 $+1$ 이동시키면, 직선 l 과 겹치게 된다.

$$\Rightarrow (x + 2) - 2(y - 1) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x - 2y + 3 = 0 \quad \cdots \quad l$$

26. 직선 $y = 2x + k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 y 절편이 -3 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

직선 $y = 2x + k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한
직선의 방정식은 $-y = -2x + k$, 즉 $y = 2x - k$
이 때, 이 직선의 y 절편이 -3 이 되어야 하므로
 $-k = -3$
 $\therefore k = 3$

27. 다음은 점 $P(a, b)$ 의 직선 $y = x$ 에 대해 대칭인 점 Q 의 좌표 (x, y) 를 구하는 과정이다.

에 알맞은 말을 차례대로 써 넣어라.

(1) $\overline{PQ}$ 의 중점 $\left(\frac{x+a}{2}, \frac{y+b}{2}\right)$ 은 직선
위에 있으므로 $\frac{y+b}{2} = \frac{x+a}{2}$
 $\therefore x - y = b - a \cdots \textcircled{1}$
(2) 직선 PQ 는 직선 $y = x$ 에 수직이므로
 $\frac{y-b}{x-a} = \text{$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 를 연립하여 x, y 를 구하면
 $x = \text{$, $y = \text{$ 이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

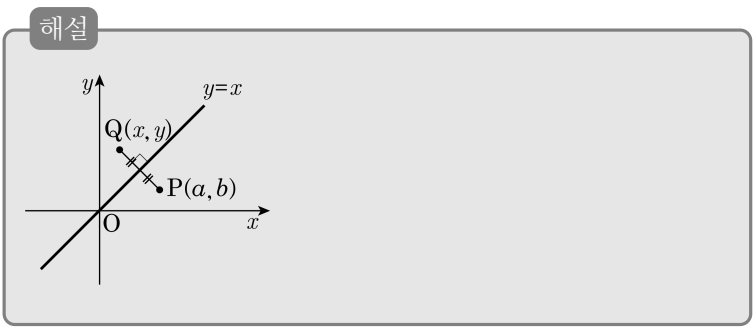
▶ 답 :

▷ 정답 : $y = x$

▷ 정답 : -1

▷ 정답 : b

▷ 정답 : a



28. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 x 축의 양의 방향으로 -1 , y 축의 양의 방향으로 3 만큼 평행이동하였더니 $y = 2x^2$ 의 그래프와 같을 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

1) x 축 대칭 : y 대신에 $-y$ 를 대입

$$\Rightarrow -y = ax^2 + x + c$$

2) x 축으로 -1 , y 축으로 3 이동

$$\Rightarrow -(y - 3) = a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$$

$$\Rightarrow y = -ax^2 - (2a + b)x + 3 - a - b - c$$

$y = 2x^2$ 과 비교한다.

$$\therefore a = -2, b = 4, c = 1$$

$$\Rightarrow a + b + c = 3$$

29. 원 $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$ 을 직선 $3x + ay + 6 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $(x + 1)^2 + (y - 8)^2 = 1$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$ 을 표준형으로 나타내면

$$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①은 원 $(x + 1)^2 + (y - 8)^2 = 1$ 과

직선 $3x + ay + 6 = 0$ 에 대하여 대칭이므로

두 원의 중심 $(5, 4)$, $(-1, 8)$ 을 이은 선분의

중점이 직선 $3x + ay + 6 = 0$ 위에 있다.

두 점 $(5, 4)$, $(-1, 8)$ 을 이은 선분의 중점은

$$\left(\frac{5 + (-1)}{2}, \frac{4 + 8}{2} \right), \text{ 즉 } (2, 6) \text{ 이므로}$$

$$3 \cdot 2 + a \cdot 6 + 6 = 0$$

$$\therefore a = -2$$

30. 두 포물선 $y = x^2 - 6x + 10$ 과 $y = -x^2 + 2x - 5$ 가 점 P 에 대하여 대칭일 때, 점 P 의 좌표는?

- ① $\left(5, \frac{3}{2}\right)$ ② $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ ③ $(0, 2)$
④ $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ ⑤ $(2, 5)$

해설

$$y = x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$y = -x^2 + 2x - 5 = -(x - 1)^2 - 4 \cdots \textcircled{2}$$

포물선 ①, ②의 꼭짓점의 좌표는

각각 $(3, 1)$, $(1, -4)$ 이고

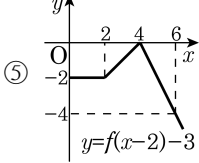
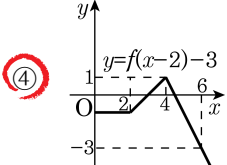
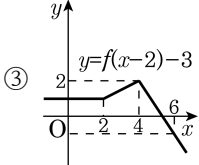
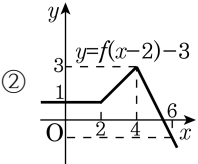
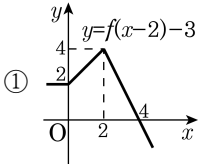
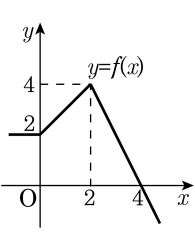
두 포물선이 점 P 에 대하여 대칭이므로

점 P 는 두 포물선의 꼭짓점의 중점이다.

$$\frac{3+1}{2} = 2, \quad \frac{1-4}{2} = -\frac{3}{2}$$

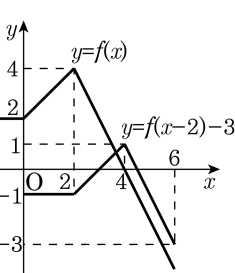
따라서, 점 P 는 $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ 이다.

31. 방정식 $y = f(x)$ 가 나타내는 도형이 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $y = f(x-2)-3$ 이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?



해설

$y = f(x-2) - 3 \Leftrightarrow y + 3 = f(x-2)$
 이므로 구하는 그래프는
 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼,
 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이다.
 따라서, 구하는 그래프는 다음 그림과 같다.



32. 다음 중 원 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

- ① $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ ㉡ $x^2 + y^2 = 1$
③ $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ ④ $(x + 1)^2 + y^2 = 2$
⑤ $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면

반지름의 길이가 같아야 한다.

$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ 에서 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$

따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은

반지름의 길이가 1인 ㉡이다.

33. $A \subset B$ 일 때, 다음 중에서 옳은 것은?

① $A^c \subset B^c$

② $A \cap B^c = A$

③ $A - B = \emptyset$

④ $A \cup B = A$

⑤ $A \cap B = B$

해설

③ $A - B = \emptyset$

34. 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e\}$ 의 부분집합 A 에 대하여 $\{a, d\} \cap A \neq \phi$ 을 만족하는 집합 A 의 개수는?

- ① 4개 ② 8개 ③ 16개 ④ 24개 ⑤ 32개

해설

$\{a, d\} \cap A \neq \phi$ 을 만족하는 집합 A 의 개수 = $n(U) - n(a \text{와 } d \text{를 모두 원소로 가지지 않는 } A)$ = $2^5 - 2^{5-2} = 32 - 8 = 24$
<주의> $\{a, d\} \cap A \neq \phi$ 을 만족하는 집합 $A \neq a$ 와 d 를 모두 원소로 가지는 A

35. ‘모든 중학생은 고등학교에 진학한다’의 부정인 명제는?

- ① 고등학교에 진학하는 중학생은 없다.
- ② 어떤 중학생은 고등학교에 진학한다.
- ③ 고등학교에 진학하지 않는 중학생도 있다.
- ④ 모든 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.
- ⑤ 어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

해설

부정이란 ‘ p 이면 q 이다’가 ‘ p 이면 q 가 아니다’이고, ‘모든’의 부정은 ‘어떤’이므로 ‘모든 중학생은(p) 고등학교에 진학한다(q)’의 부정은 ‘어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다’이다.

36. 다음 명제 중 참인 것의 개수를 구하면?

- ㉠

$2a^2 - 3b^2 = ab$ 이면 $a + b = 0$ 이다.
- ㉡

x 가 무리수 이면 x 는 무한소수이다.
- ㉢

무한소수는 분수로 나타낼 수 없다.
- ㉣

x 가 3 의 배수이면 $x + 1$ 은 짝수이다.
- ㉤

사각형의 대각선이 직교하면 마름모이다.

- ㉠

1개
- ㉡

2개
- ㉢

3개
- ㉣

4개
- ㉤

0개

해설

㉠ $2a^2 - ab - 3b^2 = 0$, $(a + b)(2a - 3b) = 0$
∴ $a + b = 0$ 또는 $2a - 3b = 0$ 이므로 거짓
㉡ 무리수는 순환하지 않는 무한소수이므로 참
㉢ 순환하는 무한소수는 유리수이므로 거짓
㉣ 반례 : $x = 6$ 일 때 $x + 1 = 7$ (홀수)
㉤ 대각선이 직교하는 사각형이 모두 마름모는 아니다. 정사각형도 있다.
∴ ㉡만 참이다.

37. 두 조건 $p: 2 \leq x < 5$, $q: a+1 < x < a+9$ 에 대하여 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되도록 하는 정수 a 의 모든 값의 합은?

① -10 ② -9 ③ -6 ④ -5 ⑤ -3

해설

조건 p 를 만족하는 진리집합을 P , 조건 q 를 만족하는 진리집합을 Q 라 하면 $p \rightarrow q$ 이려면 $P \subset Q$ 가 성립해야 한다.

$a+1 < 2$ 이고 $a+9 \geq 5$ 이므로 $a < 1$, $a \geq -4$

따라서 $-4 \leq a < 1$ 이므로 만족하는 정수 a 는 $-4, -3, -2, -1, 0$ 이고 합은 -10 이다.

38. 자연수 n 에 대하여 n^2 이 짝수이면 n 도 짝수임을 증명하는 과정이다.
빈 칸 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 쓰면?

주어진 명제의 (가)을(를) 구하여 보면
(가) : ' n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이다.'
이 때, n 이 홀수이므로
 $n = (나)(k는 0 또는 자연수)$
이 때, $n^2 = (나)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
여기에서 $2(2k^2 + 2k)$ 는 (다)이므로 n^2 은 홀수이다.
∴ (가)가(이) 참이므로 주어진 명제도 참이다.

- ① 역, $2k + 1, 0$ 또는 짝수 ② 이, $2k - 1, 홀수$
- ③ 대우, $2k + 1, 0$ 또는 짝수 ④ 대우, $2k - 1, 0$ 또는 홀수
- ⑤ 역, $2k + 1, 0$ 또는 홀수

해설

주어진 증명과정은 '명제가 참이면 그 대우도 참이다'라는 성질을 이용한 것이므로
∴ (가) : 대우
 n 이 홀수이므로 ∴ (나) : $2k + 1$
 $2(2k^2 + 2k)$ 는 $2 \times (정수)$ 의 형태이므로
∴ (다) : 0 또는 짝수

39. $a \leq x \leq 6$ 은 $2 \leq x \leq 5$ 이기 위한 필요조건이고, $b \leq x \leq 4$ 은 $2 \leq x \leq 5$ 이기 위한 충분조건일 때 a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\{x|2 \leq x \leq 5\} \subset \{x|a \leq x \leq 6\}$
 $\therefore a \leq 2$
 $\{x|b \leq x \leq 4\} \subset \{x|2 \leq x \leq 5\}$
 $\therefore 2 \leq b$
 a 의 최댓값은 2, b 의 최솟값은 2
 $\therefore 2 + 2 = 4$

40. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 P, Q 가 조건 p, q 를 만족하는 집합이라고 하자. 조건 p 가 ‘ x 는 소수’이고 p 가 q 이기 위한 필요조건일 때, 집합 Q 의 원소가 될 수 없는 것은?

- ① 2
- ② 3
- ③ 5
- ④ 7
- ⑤ 9

해설

$U = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$, $P \subset U$, $Q \subset U$ 이고 조건 p 가 ‘ x 는 소수’ 이므로 $P = \{2, 3, 5, 7\}$
 p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset P$
따라서, 집합 P 의 원소가 아닌 것은 집합 Q 의 원소가 될 수 없다.

41. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ 과 원점을 중심으로 하는 어떤 원이 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, ab 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

원 $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ 와 다른 한 원은 서로 대칭이므로 크기가 같다.

따라서 다른 원의 방정식은 $x^2 + y^2 = 5$ 이다.

원 $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ 와 $x^2 + y^2 = 5$ 이 직선 $y = ax + b$

... ①에 대하여 대칭이므로

직선 ①은 점 $(-2, 1)$ 와 점 $(0, 0)$ 을 수직이등분한다.

따라서 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ 은 직선 ①위에 있고 기울기의 곱은 -1 이다.

$$\frac{1}{2} = -a + b, \quad \frac{1}{-2} \times a = -1$$

$$\therefore a = 2, b = \frac{5}{2}$$

$$\text{따라서 } a \times b = 2 \times \frac{5}{2} = 5$$

42. 실수 전체의 집합의 부분집합 A 가 ‘ $x \in A$ 이면 $\frac{1}{3}x \in A$ 이다. (단, $A \neq \emptyset$)’를 만족할 때, 다음 설명 중 항상 옳은 것은?
- ① 모든 집합 A 는 무한집합이다.
 - ② 모든 집합 A 는 유한집합이다.
 - ③ 집합 A 중에서 유한집합은 $\{0\}$ 뿐이다.
 - ④ $3 \in A$ 이면 A 는 유한집합이다.
 - ⑤ $a \in A, b \in A$ 이면 $a + b \in A$ 이다.

해설

$x \in A$ 일 때 $\frac{1}{3}x \in A$ 이므로 다음의 세 가지 경우를 생각할 수 있다.

(i) $x \neq 0$ 일 때, $A = \left\{ x, \frac{1}{3}x, \frac{1}{9}x, \frac{1}{27}x, \dots \right\}$ 이므로 A 는 무한 집합이다.

(ii) $x = 0$ 일 때,
 $A = \{0\}$ 이므로 A 는 유한집합이다.

(iii) 위의 두 경우를 합하면

$$A = \left\{ 0, x, \frac{1}{3}x, \frac{1}{9}x, \dots \right\} \text{가 되어 무한집합이다.}$$

따라서 ③에서 A 가 유한집합이면 그 원소는 오직 0 뿐이다.

43. 집합 A, B, C, D, E 의 관계가 보기와 같을 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

보기

$$A \subset B, B \subset D, C \subset D, D \subset E$$

- ① 집합 A 는 집합 E 의 부분집합이다.
- ② 집합 B 는 집합 E 의 부분집합이다.
- ③ 집합 C 는 집합 E 의 부분집합이다.
- ④ 집합 B 는 집합 C 의 부분집합이다.
- ⑤ $D \subset C$ 이면, $A \subset C$ 이다.

해설

④ 집합 B 가 집합 C 의 부분집합인지는 주어진 조건만으론 알 수 없다.

44. 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ 이고 집합 A 에 속하는 임의의 원소 a, b 에 대하여 $a * b = a \times b$ (a 는 홀수이고 $b \neq 0$) 로 정의할 때, 집합 $B = \{x \mid x = a * b, a \in A, b \in A\}$ 의 부분집합의 개수를 구하면?

- ① 2 개
- ② 4 개
- ③ 8 개
- ④ 16 개
- ⑤ 32 개

해설

$b \backslash a$	1	3
1	1	3
2	2	6
3	3	9

표에 의하여 $B = \{1, 2, 3, 6, 9\}$ 이므로 집합 B 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$ (개)이다.

45. 세 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{ 이하의 자연수}\}$, $B = \{2, 4, 5, 8\}$, $C = \{x \mid x \text{는 홀수}\}$ 일 때, $A \cap (B \cup C)$ 는?

- ① {2, 4

해설

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{2, 4, 5, 8\}, C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$$
$$A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, \dots\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

46. 두 집합 A, B 가 다음과 같을 때, $X \cap A = X$, $X \cup (A \cap B) = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

$A = \{x|x \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수}\}, B = \{3, 5, 7\}$

- ① 2개 ② 4개 ③ 6개 ④ 8개 ⑤ 10개

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{3, 5\}$,
 $X \cap A = X$ 이므로 $X \subset A$,
 $X \cup (A \cap B) = X$ 이므로 $(A \cap B) \subset X$
 $\{3, 5\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
따라서 집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 3, 5를 반드시 포함하는 집합이므로
 $2^{5-2} = 2^3 = 8$ 이다.

47. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 23, n(B) = 39, n(A \cup B) = 62$ 일 때,
다음 안에 들어갈 수 있는 기호가 아닌 것을 모두 골라라.

보기

$A - B$ A

- ① $\in$ ② $\subset$ ③ $\supset$ ④ $\not\subset$ ⑤ $=$

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$,
 $62 = 23 + 39 - n(A \cap B)$ 에서 $n(A \cap B) = 0$ 이므로 $A \cap B = \phi$
이다.
 $A - B$ A 에서 안에 들어갈 수 있는 기호는 $\subset, \supset, =$ 이다.

48. (가) 고등학교 1학년 630명을 대상으로 경주와 제주도를 관광한 적이 있는지를 조사하였더니 경주를 관광한 학생은 400명, 제주도를 관광한 학생은 330명이었다. 이 때, 경주와 제주도를 모두 관광한 학생은 최소 m 명이고 최대 M 명이다. $m + M$ 의 값은?
- ① 200 명 ② 330 명 ③ 430 명
 ④ 500 명 ⑤ 530 명

해설

$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 730 - n(A \cup B) \dots\dots \textcircled{1}$
 i) $n(A \cap B)$ 가 최대일 경우 $\rightarrow$ 제주도를 관광한 학생이 모두 경주를 관광할 때 최대이다.
 $\therefore n(A \cap B) = 330 \dots\dots (M)$
 ii) $n(A \cap B)$ 가 최소인 경우 $\rightarrow$
 $\textcircled{1}$ 에서 $n(A \cup B)$ 가 최대일 때이다.
 $\therefore n(A \cup B) = n(U) = 630$
 $\Rightarrow n(A \cap B) = 100 \dots\dots (m)$
 $M + m = 330 + 100 = 430$

49. 다음 등식을 이용하여 증명할 수 있는 부등식은?

$$\begin{aligned} &a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \\ &= \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \end{aligned}$$

- ① $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$
- ② $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leq |a| + |b| + |c|$
- ③ $\sqrt{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq |a + b + c|$
- ④ $a^2 + b^2 + c^2 \leq (a + b + c)^2$
- ⑤ $a + b + c \geq 3^3 \sqrt{abc}$

해설

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \geq 0 \text{ 이므로} \\ &a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \\ &\text{③의 경우 양변을 제곱하여 빼면} \\ &3(a^2 + b^2 + c^2) - |a + b + c|^2 \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geq 0 \\ &\therefore \sqrt{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq |a + b + c| \end{aligned}$$

50. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때
 $\left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로

$$\frac{b}{a} > 0, \frac{c}{b} > 0, \frac{a}{c} > 0$$

$$1 + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{1 \times \frac{b}{a}} = 2\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$1 + \frac{c}{b} \geq 2\sqrt{\frac{c}{b}}, \quad 1 + \frac{a}{c} \geq 2\sqrt{\frac{a}{c}}$$

$$\therefore \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right)$$

$$\geq 8\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{c}{b}}\sqrt{\frac{a}{c}} = 8$$

$$\therefore \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \geq 8$$

따라서 최솟값은 8