1. 원 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 과 중심이 같고 점 $(5,\ -3)$ 을 지나는 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 이라고 할 때, $a+b+r$ 의 값은? (단, a, b, r 은 상수)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x^2+y^2-4x-2y+1=0$

$\Rightarrow\quad (x-2)^2+(y-1)^2=4$

$\therefore$ 중심은 $(2, 1)$ 이다.

$\Rightarrow\quad (x-2)^2+(y-1)^2=r^2$

$(5,\ -3)$ 을 지나므로 대입하면,

$(5-2)^2+(-3-1)^2=r^2 \quad r=5$

$\therefore\quad a+b+r=2+1+5=8$

2. 두 원 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$, $x^2+y^2-6x-8y=0$의 위치관계 중 옳은 것은?

① 서로 외부에 있다

② 외접한다

③ 두 점에서 만난다

④ 내접한다

⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다

해설

$x^2+y^2-2x-2y+1=0$을 정리하면
$(x-1)^2+(y-1)^2=1$
$x^2+y^2-6x-8y=0$을 정리하면
$(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$
$\sqrt{3-1^2+(4-1)^2}<5-1$
따라서 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

3. 두 원 $x^2+y^2+2x-6y+8=0$, $x^2+y^2-4y=0$ 의 공통현의 방정식은?

① $x-5y+4=0$

② $4x-3y+4=0$

③ $3x-3y+4=0$

④ $x-y+4=0$

⑤ $2x-y+1=0$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2+2x-6y+8-\left(x^2+y^2-4y\right)=0$

$2x-2y+8=0$

$\therefore x-y+4=0$

4. 집합 A는 2, 3, 5, 7 을 원소로 가질 때, 다음 중 틀린 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $1 \notin A$ ② $2 \in A$ ③ $6 \notin A$ ④ $9 \in A$ ⑤ $3 \notin A$

해설

a가 집합 A의 원소이면 $a \in A$, b가 A의 원소가 아니면 $b \notin A$ 이다.

④ $9 \notin A$

⑤ $3 \in A$

5. 두 집합 $A = \left\{x \mid x\text{는 } 6\text{의 약수}\right\}$, $B = \{a,\ b, \{c,\ \varnothing\}\}$ 일 때, $n(A) + n(B)$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A = \left\{x \mid x\text{는 } 6\text{의 약수}\right\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ 이므로
$n(A) = 4$ 이고, $n(B) = 3$ 이므로 $n(A) + n(B) = 7$ 이다.

6. 집합 $A = \{1,\ 2,\ \{1,\ 2\},\ \varnothing\}$일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\varnothing \in A$　② $\varnothing \subset A$　③ $\{1,\ 2\} \subset A$

④ $\{1,\ 2\} \in A$　⑤ $\{2\} \in A$

해설

$\{2\} \subset A$

7. 두 집합 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{4, 8, 10\}$ 에 대하여 $(A \cup B) - (A \cap B)$ 는?

① $\{2\}$ ② $\{4\}$ ③ $\{2, 4\}$

④ $\{2, 6\}$ ⑤ $\{2, 4, 6\}$

해설

$(A \cup B) - (A \cap B) = \{2, 4, 6, 8, 10\} - \{4, 8, 10\} = \{2, 6\}$ 이다.

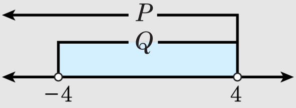
8. $x < 4$는 $-4 < x < 4$ 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$p : x < 4$, q : $-4 < x < 4$ 라고 하면



$\therefore Q \subset P$

9. 점 (3, 0) 을 지나고 x 축과 직선 $y=x$ 에 동시에 접하는 원의 중심이 제1 사분면 위에 있을 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $-1+\sqrt{2}$　② $-2+2\sqrt{2}$　③ $-3+3\sqrt{2}$

④ $-2+3\sqrt{2}$　⑤ $-3+4\sqrt{2}$

해설

원이 점 $(3,0)$ 을 지나고 x 축에 접하고,
중심이 제1 사분면 위에 있으므로
구하는 원의 방정식을
$(x-3)^2+(y-b)^2=b^2\ (b>0)$ 으로 놓을 수 있다.
이때, 이 원과 직선 $y=x$ 도 접하므로
원의 중심 $(3,b)$ 에서
직선 $x-y=0$ 에 이르는 거리는
원의 반지름의 길이 b 와 같다.

즉, $\dfrac{|3-b|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=b, |3-b|=\sqrt{2}b$

양변을 제곱하면
$9-6b+b^2=2b^2, b^2+6b-9=0$
$\therefore b=-3\pm3\sqrt{2}$
그런데 $b>0$ 이므로
$b=-3+3\sqrt{2}$

10. 점 $(-1, 2)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x+1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x+5)^2+(y-5)^2=25$

② $(x-2)^2+(y-2)^2=2$ 또는 $(x+4)^2+(y-4)^2=16$

③ $(x-3)^2+(y-3)^2=3$ 또는 $(x+3)^2+(y-3)^2=9$

④ $(x-4)^2+(y-4)^2=4$ 또는 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$

⑤ $(x-5)^2+(y-5)^2=5$ 또는 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$

해설

점 $(-1, 2)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하려면 오른쪽 그림과 같이 원의 중심이 제2사분면에 있어야 한다.

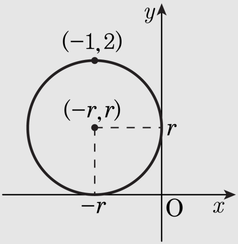
따라서, 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 중심은 $(-r, r)$이므로

구하는 원의 방정식을 $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$으로 놓을 수 있다.

이 때, 이 원이 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$(-1+r)^2+(2-r)^2=r^2$, $r^2-6r+5=0$

$\therefore r=1$ 또는 $r=5$

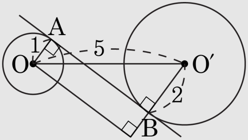


11. 반지름의 길이가 각각 1, 2인 두 원 O, O′의 중심거리가 5일 때, 두 원의 공통내접선의 길이는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

주어진 두 원의 그래프를 다음 그림과 같이 나타내면 $\overline{AB}$가 공통내접선이 된다.



점 O에서 선분 O′B의 연장선 위에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AO} = \overline{BH} = 1$

$\therefore \overline{O'H} = 1 + 2 = 3$

이때, 두 원의 중심거리가 5이므로

$\triangle OHO'$에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AB} = \overline{OH} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

12. 직선 $y = mx + 3$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 와 서로 만나지 않을 때, m 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$ ② $-2\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}$

③ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$ ④ $m \leq -2\sqrt{2},\ m \geq 2\sqrt{2}$

⑤ $m < -3\sqrt{2},\ m > 3\sqrt{2}$

해설

원과 직선이 서로 만나지 않으려면 원의 중심부터 직선까지 거리가 반지름보다 커야 한다.

$$\therefore \quad \frac{|m \times 0 + (-1) \times 0 + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1$$

$$\Rightarrow \quad m^2 + 1 < 9$$

$$\Rightarrow \quad -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$$

13. $x^2+y^2=1$ 일 때, $2x+y$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

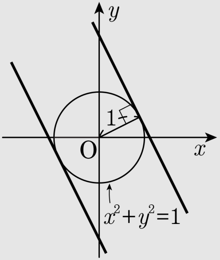
▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 $\sqrt{5}$

▷ 정답 : 최솟값 $-\sqrt{5}$

해설



구하는 $2x+y=k$ 라 하면 $y=-2x+k$ 에서 k 는 기울기가 -2 인 직선의 y 절편이다.

주어진 조건을 만족할 때, 직선은 다음 그림과 같이 존재하므로 점과 직선사이의 거리에서 $\dfrac{|k|}{\sqrt{5}} \le 1$

$\therefore\ -5 \le k \le \sqrt{5}$

14. 직선 $3x+4y+a=0$ 이 원 $x^2+y^2=4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 19 개

해설

직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면
원의 중심에서 직선까지의 거리(d) 보다
원의 반지름 (r) 이 크다.

$$d=\frac{|3\times0+4\times0+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|a|}{5}<2=r$$

$$\frac{|a|}{5}<2\ ,\ |a|<10,\ -10<a<10$$

$a=-9,\ -8,\ -7,\ -6,\ \cdots,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\ \therefore$ 19 개

15. 직선 $y=x+4$가 원 $x^2+y^2=9$에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

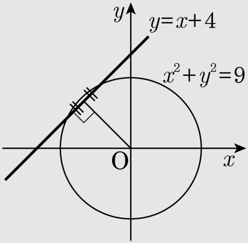
▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x-y+4=0$

이므로 $\dfrac{|4|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을
수직이등분하므로 피타고라스 정리에서 ,
현의 길이는 $2\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=2$

16. 점 $(1, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접선을 그을 때 접선의 길이를 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

해설

원의 중심과 점 $(1, 3)$ 사이의 거리는 $\sqrt{10}$ 이므로
피타고라스의 정리에 의해 접선의 길이는 $\sqrt{10 - 1} = 3$

17. 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=10$ 위의 점 $(-3,\ 4)$ 에서의 접선의 방정식이 $y=mx+n$ 일 때, $3m+n$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(-3,\ 4)$ 을 지나는 방정식 : $y=m(x+3)+4$
원에 접하므로 원 중심에서 직선까지 거리는 반지름과 같다.

$$\Rightarrow \quad \frac{|m\times(-2)-1\times1+3m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \quad (m+3)^2=10m^2+10$$

$$\Rightarrow \quad (3m-1)^2=0,\ m=\frac{1}{3}$$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{3}x+5 \quad \Rightarrow \quad 3m+n=6$

18. 직선 $3x-4y-12=0$ 에 수직이고 원 $(x+3)^2+(y-2)^2=1$ 에 접하는 접선의 방정식을 구하면?

① $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{5}{2}x-\frac{1}{3}$
② $y=-2x-\frac{4}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{5}x-1$
③ $y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}$
④ $y=-\frac{6}{5}x-\frac{2}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{7}x-\frac{9}{2}$
⑤ $y=-4x-3$ 또는 $y=-9x-6$

해설

$3x-4y-12=0$ 에서

$y=\frac{3}{4}x-3\cdots\cdots$ ㉠

이 때, 구하는 접선이 ㉠과 수직이므로

기울기가 $-\frac{4}{3}$ 인 직선의 방정식은

$y=-\frac{4}{3}x+b\cdots\cdots$ ㉡

로 놓을 수 있다.

㉡에서 $4x+3y-3b=0$ 이고,

원의 중심 $(-3,2)$ 에서 이 직선까지의 거리가

반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|-12+6-3b|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1, |3b+6|=5, 3b+6=\pm5$

$3b=-1$ 또는 $3b=-11$

$\therefore b=-\frac{1}{3}$ 또는 $b=-\frac{11}{3}$

이것을 ㉡에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}$

해설

$(x+3)^2+(y-2)^2=1$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+6x-4y+12=0$ 이므로

㉡을 이 식에 대입하여 정리하면

$25x^2+6(17-4b)x+9\left(b^2-4b+12\right)=0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$\frac{D}{4}=\left\{3(17-4b)\right\}^2-25\cdot9\left(b^2-4b+12\right)=0$

$D=0$ 에서 $9b^2+36b+11=0,$

$(3b+1)(3b+11)=0$

$\therefore b=-\frac{1}{3}$ 또는 $b=-\frac{11}{3}$ 이것을 ㉡ 에 대입하면

구하는 접선의 방정식은

$y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}$

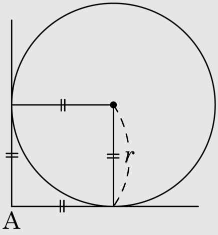
19. 좌표평면 위에 원 $(x-5)^2+(y-4)^2=r^2$과 원 밖의 점 A$(2,\ 1)$이 있다. 점 A에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r의 값은?

① 3 ② $\sqrt{10}$ ③ $\sqrt{11}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

해설

두 접선이 서로 수직이면 그림처럼 한 변이 r인 정사각형이 된다.

따라서 원 중심에서 A까지의 거리는 $\sqrt{2}r$이 된다.



$\therefore\ \sqrt{(5-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{2}r$

$\therefore\ r=3$

20. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 7

해설

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$
$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$
$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{\mathrm{OP}}$ $\sqrt{4^2 + 3^2} + 2 = 7$

21. 이차방정식 $x^2+y^2=2|x|$과 $x^2+y^2=2|x+y|$의 공통근의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 5 개

해설

$x^2+y^2=2|x| \cdots$ ㉠

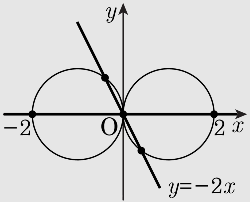
$x^2+y^2=2|x+y| \cdots$ ㉡

㉠과 ㉡에서 $2|x|=2|x+y|$

$\therefore x+y=\pm x$

$\therefore y=0$ 또는 $y=-2x \cdots$ ㉢

㉠과 ㉢의 교점의 개수는 다음 그림에서 5개이다.



실제로, 교점을 구하면

$(0,\ 0)$, $(\pm2,\ 0)$, $\left(\pm\frac{2}{5},\ \mp\frac{4}{5}\right)$

(복부호동순)

22. 평행이동 $(x,\ y) \to (x+a,\ y+b)$에 의하여 점$(3,\ 5)$가 점$(8,\ 20)$으로 이동했다고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

해설

점$(3,\ 5)$가 점$(8,\ 20)$으로 이동하려면 x축 방향으로 $+5$, y축 방향으로 $+15$만큼 평행이동 해야 한다. 따라서 $a=5,\ b=15$

23. 원 $(x-2)^2+(y-3)^2=5$ 를 원 $(x+1)^2+(y-5)^2=5$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $x+3y+2=0$ 은 직선 $x+ay+b=0$ 으로 옮겨진다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=2$

해설

원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동과 일치하므로
주어진 두 원의 중심의 좌표를 구하면
$(x-2)^2+(y-3)^2=5 \rightarrow$ 원의 중심 :$(2,3)$
$(x+1)^2+(y-5)^2=5 \rightarrow$ 원의 중심 :$(-1,5)$
점 $(-1,\ 5)$ 는 점 $(2,3)$ 을 x 축의 방향으로
-3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행 이동한 것이다.
따라서 직선 $x+3y+2=0$ 을 x 축의 방향으로
-3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$(x+3)+3(y-2)+2=0$
$\therefore\ x+3y-1=0\ \cdots$ ㉠
㉠ 이 $x+ay+b=0$ 과 일치하므로
$a=3$, $b=-1$ $\therefore a+b=2$

24. 원 $x^2+y^2=1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 직선 $y=x+3$ 과 접하게 될 때, 양수 m 의 값을 구하면?

① $2\sqrt{2}+1$ ② $\sqrt{2}+1$ ③ $\sqrt{2}$
④ $\sqrt{2}-1$ ⑤ $2\sqrt{2}-1$

해설

$x^2+y^2=1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼,
y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면
$(x-m)^2+(y-2)^2=1 \cdots\cdots ㉠$
㉠이 직선 $x-y+3=0$ 과 접하므로
점 $(m,\ 2)$ 와 직선 $x-y+3=0$ 사이의 거리가 1 이다.

$$\frac{|m-2+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1$$

이것을 풀면 $m=-1\pm\sqrt{2}$
$\therefore m=-1+\sqrt{2}\ (\because m>0)$

25. 직선 l 을 x 축의 양의 방향으로 2 만큼, y 축의양의 방향으로 -1 만큼 평행이동 시켰더니 $x-2y-1=0$ 와 겹쳤다. 직선 l 의 방정식은?

① $x+y-1=0$ ② $x-2y+3=0$ ③ $2x+y-1=0$
④ $x-y+5=0$ ⑤ $x-2y+7=0$

해설

거꾸로 $x-2y-1=0$ 을 x 축으로 -2 , y 축으로 $+1$ 이동시키면, 직선 l 과 겹치게 된다.

$\Rightarrow\ (x+2)-2(y-1)-1=0$

$\Rightarrow\ x-2y+3=0\ \cdots\ l$

26. 직선 $y=2x+k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 y 절편이 -3 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ **답:**

▷ **정답:** 3

해설

직선 $y=2x+k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $-y=-2x+k$, 즉 $y=2x-k$
이 때, 이 직선의 y 절편이 -3 이 되어야 하므로
$-k=-3$
$\therefore k=3$

27. 다음은 점 P$(a,\ b)$ 의 직선 $y=x$ 에 대해 대칭인 점 Q의 좌표 $(x,\ y)$ 를 구하는 과정이다.
$\boxed{\quad}$ 에 알맞은 말을 차례대로 써 넣어라.

> (1) $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점 $\left(\dfrac{x+a}{2},\ \dfrac{y+b}{2}\right)$ 은 직선
> $\boxed{\quad}$ 위에 있으므로 $\dfrac{y+b}{2}=\dfrac{x+a}{2}$
> $\therefore\ x-y=b-a\cdots$ ①
> (2) 직선 PQ 는 직선 $y=x$ 에 수직이므로
> $\dfrac{y-b}{x-a}=\boxed{\quad}$
> ①, ② 를 연립하여 x , y 를 구하면
> $x=\boxed{\quad}$, $y=\boxed{\quad}$이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

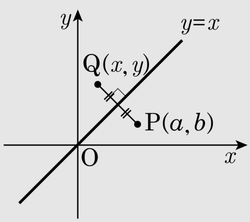
▷ 정답 : $y=x$

▷ 정답 : -1

▷ 정답 : b

▷ 정답 : a

해설



28. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 x 축의 양의 방향으로 -1 , y 축의 양의 방향으로 3 만큼 평행이동하였더니 $y = 2x^2$ 의 그래프와 같을 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

1) x 축 대칭 : y대신에 $-y$를 대입

$\Rightarrow -y = ax^2 + x + c$

2) x 축으로 -1, y 축으로 3 이동

$\Rightarrow -(y-3) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$

$\Rightarrow y = -ax^2 - (2a+b)x + 3 - a - b - c$

$y = 2x^2$ 과 비교한다.

$\therefore a = -2,\ \ b = 4,\ \ c = 1$

$\Rightarrow a + b + c = 3$

29. 원 $x^2+y^2-10x-8y+40=0$ 을 직선 $3x+ay+6=0$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $(x+1)^2+(y-8)^2=1$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2+y^2-10x-8y+40=0$ 을 표준형으로 나타내면
$(x-5)^2+(y-4)^2=1 \cdots\cdots$ ㉠
㉠은 원 $(x+1)^2+(y-8)^2=1$ 과
직선 $3x+ay+6=0$ 에 대하여 대칭이므로
두 원의 중심 $(5,4)$, $(-1,\ 8)$ 을 이은 선분의
중점이 직선 $3x+ay+6=0$ 위에 있다.
두 점 $(5,4),(-1,8)$ 을 이은 선분의 중점은
$\left(\frac{5+(-1)}{2}, \frac{4+8}{2}\right)$, 즉 $(2,6)$ 이므로
$3\cdot2+a\cdot6+6=0$
$\therefore a=-2$

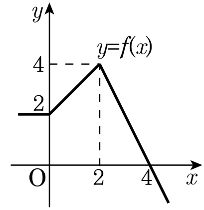
30. 두 포물선 $y = x^2 - 6x + 10$ 과 $y = -x^2 + 2x - 5$ 가 점 P 에 대하여 대칭일 때, 점 P 의 좌표는?

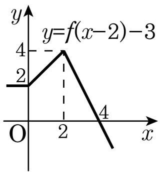
① $\left(5,\ \frac{3}{2}\right)$ ② $\left(2,\ -\frac{3}{2}\right)$ ③ $(0,\ 2)$
④ $\left(2,\ -\frac{1}{2}\right)$ ⑤ $(2,\ 5)$

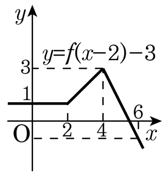
해설

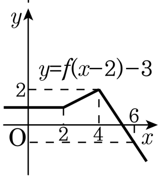
$y = x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1 \cdots$ ㉠
$y = -x^2 + 2x - 5 = -(x-1)^2 - 4 \cdots$ ㉡
포물선 ㉠, ㉡의 꼭짓점의 좌표는
각각 $(3,\ 1)$, $(1,\ -4)$ 이고
두 포물선이 점 P 에 대하여 대칭이므로
점 P 는 두 포물선의 꼭짓점의 중점이다.
$\frac{3+1}{2} = 2$, $\frac{1-4}{2} = -\frac{3}{2}$
따라서, 점 P 는 $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ 이다.

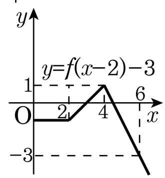
31. 방정식 $y=f(x)$ 가 나타내는 도형이 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $y=f(x-2)-3$ 이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?

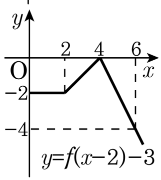


①


②


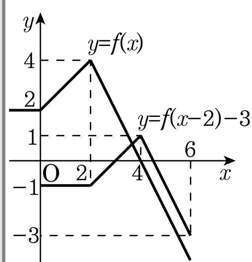
③


④


⑤


해설

$y=f(x-2)-3 \Leftrightarrow y+3=f(x-2)$
이므로 구하는 그래프는
$y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로
2 만큼,
y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한
것이다.
따라서, 구하는 그래프는 다음 그림과
같다.



32. 다음 중 원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=\frac{1}{2}$

② $x^2+y^2=1$

③ $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

④ $(x+1)^2+y^2=2$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 에서 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 1 인 ②이다.

33. $A \subset B$ 일 때, 다음 중에서 옳은 것은?

① $A^c \subset B^c$ ② $A \cap B^c = A$ ③ $A - B = \varnothing$

④ $A \cup B = A$ ⑤ $A \cap B = B$

해설

③ $A - B = \varnothing$

34. 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e\}$의 부분집합 A에 대하여 $\{a, d\} \cap A \neq \phi$을 만족하는 집합 A의 개수는?

① 4 개 ② 8 개 ③ 16 개 ④ 24 개 ⑤ 32 개

해설

$\{a, d\} \cap A \neq \phi$ 을 만족하는 집합 A 의 개수$= n(U) - n(a$와 d 를 모두 원소로 가지지 않는 A $) = 2^5 - 2^{5-2} = 32 - 8 = 24$

<주의> $\{a, d\} \cap A \neq \phi$ 을 만족하는 집합 $A \neq a$와 d를 모두 원소로 가지는 A

35. ‘모든 중학생은 고등학교에 진학한다’ 의 부정인 명제는?

① 고등학교에 진학하는 중학생은 없다.

② 어떤 중학생은 고등학교에 진학한다.

③ 고등학교에 진학하지 않는 중학생도 있다.

④ 모든 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

⑤ 어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

해설

부정이란 ‘p 이면 q 이다’ 가 ‘p 이면 q 가 아니다’ 이고, ‘모든’ 의 부정은 ‘어떤’ 이므로 ‘모든 중학생은(p) 고등학교에 진학한다(q)’ 의 부정은 ‘어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다’ 이다.

36. 다음 명제 중 참인 것의 개수를 구하면?

㉠ $2a^2 - 3b^2 = ab$ 이면 $a+b=0$ 이다.
㉡ x 가 무리수 이면 x 는 무한소수이다.
㉢ 무한소수는 분수로 나타낼 수 없다.
㉣ x 가 3 의 배수이면 $x+1$ 은 짝수이다.
㉤ 사각형의 대각선이 직교하면 마름모이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 0개

해설

㉠ $2a^2 - ab - 3b^2 = 0$, $(a+b)(2a-3b) = 0$
$\therefore$ $a+b=0$ 또는 $2a-3b=0$ 이므로 거짓
㉡ 무리수는 순환하지 않는 무한소수이므로 참
㉢ 순환하는 무한소수는 유리수이므로 거짓
㉣ 반례 : $x=6$ 일 때 $x+1=7$(홀수)
㉤ 대각선이 직교하는 사각형이 모두 마름모는 아니다. 정사각형도 있다.
$\therefore$ ㉡만 참이다.

37. 두 조건 $p: 2 \le x < 5$, $q: a+1 < x < a+9$ 에 대하여 명제 $p \to q$ 가 참이 되도록 하는 정수 a 의 모든 값의 합은?

① -10 ② -9 ③ -6 ④ -5 ⑤ -3

해설

조건 p 를 만족하는 진리집합을 P, 조건 q 를 만족하는 진리집합을 Q 라 하면 $p \to q$ 이려면 $P \subset Q$ 가 성립해야 한다.
$a+1 < 2$ 이고 $a+9 \ge 5$ 이므로 $a < 1$, $a \ge -4$
따라서 $-4 \le a < 1$ 이므로 만족하는 정수 a 는 -4, -3, -2, -1, 0 이고 합은 -10 이다.

38. 자연수 n에 대하여 n^2 이 짝수이면 n도 짝수임을 증명하는 과정이다. 빈 칸 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 차례로 쓰면?

> 주어진 명제의 (가) 을(를) 구하여 보면
> (가) : 'n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이다.'
> 이 때, n 이 홀수이므로
> $n=$ (나)(k는 0 또는 자연수)
> 이 때, $n^2=$ (나)$^2=2(2k^2+2k)+1$
> 여기에서 $2(2k^2+2k)$ 는 (다) 이므로 n^2 은 홀수이다.
> ∴ (가) 가(이) 참이므로 주어진 명제도 참이다.

① 역, $2k+1$, 0 또는 짝수
② 이, $2k-1$, 홀수
③ 대우, $2k+1$, 0 또는 짝수
④ 대우, $2k-1$, 0 또는 홀수
⑤ 역, $2k+1$, 0 또는 홀수

해설

주어진 증명과정은 '명제가 참이면 그 대우도 참이다' 라는 성질을 이용한 것이므로
∴ (가) : 대우
n 이 홀수이므로 ∴ (나) : $2k+1$
$2(2k^2+2k)$ 는 $2\times$(정수) 의 형태이므로
∴ (다) : 0 또는 짝수

39. $a \le x \le 6$은 $2 \le x \le 5$이기 위한 필요조건이고, $b \le x \le 4$은 $2 \le x \le 5$이기 위한 충분조건일 때 a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

$\{x|2 \le x \le 5\} \subset \{x|a \le x \le 6\}$

$\therefore a \le 2$

$\{x|b \le x \le 4\} \subset \{x|2 \le x \le 5\}$

$\therefore 2 \le b$

a의 최댓값은 2, b의 최솟값은 2

$\therefore 2 + 2 = 4$

40. 전체집합 $U=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$ 의 두 부분집합 $P,\ Q$ 가 조건 $p,\ q$를 만족하는 집합이라고 하자. 조건 p가 'x는 소수' 이고 p가 q이기 위한 필요조건일 때, 집합 Q의 원소가 될 수 없는 것은?

① 2　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$U=\{1,2,3,\cdots,9,10\},\ P\subset U,\ Q\subset U$ 이고 조건 p가 'x는 소수' 이므로 $P=\{2,3,5,7\}$

p가 q이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset P$

따라서, 집합 P의 원소가 아닌 것은 집합 Q의 원소가 될 수 없다.

41. 원 $x^2+y^2+4x-2y=0$과 원점을 중심으로 하는 어떤 원이 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭일 때, ab의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

원 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$와 다른 한 원은 서로 대칭이므로 크기가 같다.
따라서 다른 원의 방정식은 $x^2+y^2=5$이다.
원 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ 와 $x^2+y^2=5$ 이 직선 $y=ax+b$ $\cdots$① 에 대하여 대칭이므로
직선 ①은 점 $(-2,1)$ 와 점 $(0,0)$을 수직이등분한다.
따라서 $\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$은 직선 ①위에 있고 기울기의 곱은 -1이다.

$\dfrac{1}{2}=-a+b$, $\dfrac{1}{-2}\times a=-1$

$\therefore\ a=2, b=\dfrac{5}{2}$

따라서 $a\times b=2\times\dfrac{5}{2}=5$

42. 실수 전체의 집합의 부분집합 A가 '$x \in A$이면 $\frac{1}{3}x \in A$이다. (단, $A \neq \varnothing$)'를 만족할 때, 다음 설명 중 항상 옳은 것은?

① 모든 집합 A는 무한집합이다.

② 모든 집합 A는 유한집합이다.

③ 집합 A중에서 유한집합은 $\{0\}$뿐이다.

④ $3 \in A$ 이면 A는 유한집합이다.

⑤ $a \in A,\ b \in A$ 이면 $a+b \in A$이다.

해설

$x \in A$ 일 때 $\frac{1}{3}x \in A$ 이므로 다음의 세 가지 경우를 생각할 수 있다.

(i) $x \neq 0$ 일 때, $A = \left\{x,\ \frac{1}{3}x,\ \frac{1}{9}x,\ \frac{1}{27}x, \cdots\right\}$ 이므로 A 는 무한집합이다.

(ii) $x = 0$ 일 때,
$A = \{0\}$ 이므로 A 는 유한집합이다.

(iii) 위의 두 경우를 합하면
$A = \left\{0,\ x,\ \frac{1}{3}x,\ \frac{1}{9}x, \cdots\right\}$가 되어 무한집합이다.

따라서 ③에서 A 가 유한집합이면 그 원소는 오직 0뿐이다.

43. 집합 A, B, C, D, E 의 관계가 보기와 같을 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

보기

$$A \subset B,\ B \subset D,\ C \subset D,\ D \subset E$$

① 집합 A 는 집합 E 의 부분집합이다.

② 집합 B 는 집합 E 의 부분집합이다.

③ 집합 C 는 집합 E 의 부분집합이다.

④ 집합 B 는 집합 C 의 부분집합이다.

⑤ $D \subset C$ 이면, $A \subset C$ 이다.

해설

④ 집합 B 가 집합 C 의 부분집합인지는 주어진 조건만으로는 알 수 없다.

44. 집합 $A = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ 이고 집합 A 에 속하는 임의의 원소 $a,\ b$ 에 대하여 $a * b = a \times b$ (a는 홀수이고 $b \neq 0$) 로 정의할 때, 집합 $B = \{x \mid x = a * b,\ a \in A,\ b \in A\}$ 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

$b \backslash a$	1	3
1	1	3
2	2	6
3	3	9

표에 의하여 $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9\}$ 이므로 집합 B 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$ (개) 이다.

45. 세 집합 $A = \{x \mid x$는 6 이하의 자연수$\}$, $B = \{2,\ 4,\ 5,\ 8\}$, $C = \{x \mid x$는 홀수$\}$ 일 때, $A \cap (B \cup C)$ 는?

① $\{2,\ 4\}$

② $\{2,\ 3,\ 4\}$

③ $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

④ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

⑤ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8\}$

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 5, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11 \cdots\}$

$A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, \cdots\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

46. 두 집합 A, B가 다음과 같을 때, $X \cap A = X$, $X \cup (A \cap B) = X$를 만족하는 집합 X의 개수는?

$A = \{x \mid x$는 5 이하의 자연수$\}$, $B = \{3,\ 5,\ 7\}$

① 2개　② 4개　③ 6개　④ 8개　⑤ 10개

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $A \cap B = \{3, 5\}$,
$X \cap A = X$이므로 $X \subset A$,
$X \cup (A \cap B) = X$이므로 $(A \cap B) \subset X$
$\{3,\ 5\} \subset X \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$,
따라서 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 원소 3, 5를 반드시 포함하는 집합이므로
$2^{5-2} = 2^3 = 8$이다.

47. 두 집합 $A,\ B$ 에 대하여 $n(A)=23,\ n(B)=39,\ n(A\cup B)=62$ 일 때, 다음 $\boxed{}$ 안에 들어갈 수 있는 기호가 <u>아닌</u> 것을 모두 골라라.

보기

$$A-B\ \boxed{}\ A$$

① $\in$ ② $\subset$ ③ $\supset$ ④ $\not\subset$ ⑤ $=$

해설

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$,
$62=23+39-n(A\cap B)$ 에서 $n(A\cap B)=0$ 이므로$A\cap B=\phi$ 이다.
$A-B\ \boxed{}\ A$ 에서 $\boxed{}$ 안에 들어갈 수 있는 기호는 $\subset,\ \supset,\ =$ 이다.

48. (가) 고등학교 1 학년 630 명을 대상으로 경주와 제주도를 관광한 적이 있는지를 조사하였더니 경주를 관광한 학생은 400 명, 제주도를 관광한 학생은 330 명이였다. 이 때, 경주와 제주도를 모두 관광한 학생은 최소 m 명이고 최대 M 명이다. $m+M$ 의 값은?

① 200 명 ② 330 명 ③ 430 명
④ 500 명 ⑤ 530 명

해설

$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 730 - n(A \cup B) \cdots\cdots$ ㉠

i) $n(A \cap B)$ 가 최대일 경우 → 제주도를 관광한 학생이 모두 경주를 관광할 때 최대이다.

$\therefore n(A \cap B) = 330 \cdots\cdots (M)$

ii) $n(A \cap B)$ 가 최소인 경우 → ㉠에서 $n(A \cup B)$ 가 최대일 때이다.

$\therefore n(A \cup B) = n(U) = 630$

$\Rightarrow n(A \cap B) = 100 \cdots\cdots (m)$

$M + m = 330 + 100 = 430$

49. 다음 등식을 이용하여 증명할 수 있는 부등식은?

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

① $|a+b+c| \le |a|+|b|+|c|$

② $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \le |a|+|b|+|c|$

③ $\sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \ge |a+b+c|$

④ $a^2+b^2+c^2 \le (a+b+c)^2$

⑤ $a+b+c \ge 3^3\sqrt{abc}$

해설

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \ge 0$ 이므로

$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

③의 경우 양변을 제곱하여 빼면

$3(a^2+b^2+c^2)-|a+b+c|^2$

$=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \ge 0$

$\therefore\ \sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \ge |a+b+c|$

50. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$일 때
$\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{c}{b}\right)\left(1+\dfrac{a}{c}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$a > 0,\ b > 0,\ c > 0$이므로

$\dfrac{b}{a} > 0,\ \dfrac{c}{b} > 0,\ \dfrac{a}{c} > 0$

$1+\dfrac{b}{a} \geq 2\sqrt{1\times\dfrac{b}{a}} = 2\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

$1+\dfrac{c}{b} \geq 2\sqrt{\dfrac{c}{b}},\ 1+\dfrac{a}{c} \geq 2\sqrt{\dfrac{a}{c}}$

$\therefore \left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{c}{b}\right)\left(1+\dfrac{a}{c}\right)$

$\geq 8\sqrt{\dfrac{b}{a}}\sqrt{\dfrac{c}{b}}\sqrt{\dfrac{a}{c}} = 8$

$\therefore \left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{c}{b}\right)\left(1+\dfrac{a}{c}\right) \geq 8$

따라서 최솟값은 8