1. 방정식 $(x^2+x+2)^2+8=12(x^2+x)$ 의 모든 근의 합은?

① 1　　② 0　　③ −1　　④ −2　　⑤ −3

해설

$x^2+x=Y$ 라 하면, $(Y+2)^2+8=12Y$

$Y^2-8Y+12=0,\ (Y-2)(Y-6)=0$

$Y=2$ 또는 $Y=6$

(i) $Y=2$

$x^2+x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$ 또는 $x=1$

(ii) $Y=6$

$x^2+x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x=-3$ 또는 $x=2$

$\therefore$ 모든 근의 합 $=-2$

2. 사차방정식 $x^4-6x^3+11x^2-6x+1=0$의 한 근을 α라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\alpha}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

먼저 주어진 방정식을 x^2으로 나누면

방정식은 $x^2-6x+11-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-6\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0$이 된다.

이 식에 α를 넣어도 성립하므로

$\alpha+\frac{1}{\alpha}$를 t로 치환하면

$\alpha+\frac{1}{\alpha}$는 3이 된다.

따라서 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=3$

3. 삼차방정식 $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, 자연수 n에 대하여 $f(n)$을 $f(n)=\dfrac{\omega^{2n}}{1+\omega^n}$으로 정의하자. 이 때, $f(1)+f(2)+\cdots+f(8)$의 값은?

① -6　　② -5　　③ $-\dfrac{9}{2}$　　④ $-\dfrac{3}{2}$　　⑤ 0

해설

$x^3-1=0 \ \Rightarrow$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\Rightarrow \omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

$n=3\alpha,\ 3\alpha+1,\ 3\alpha+2$라 하자

i) $n=3\alpha$

$$f(n)=\frac{\omega^{2n}}{1+\omega^n}$$

$$=\frac{(\omega^3)^{2\alpha}}{1+(\omega^3)^{\alpha}}=\frac{1}{2}$$

ii) $n=3\alpha+1$

$$f(n)=\frac{(\omega^3)^{2\alpha}\times\omega^2}{1+(\omega^3)^{\alpha}\times\omega}$$

$$=\frac{\omega^2}{\omega+1}$$

$$=\frac{\omega^2}{-\omega^2}=-1$$

iii) $n=3\alpha+2$

$$f(n)=\frac{(\omega^3)^{2\alpha}\times\omega^4}{1+\omega^{3\alpha}\times\omega^2}$$

$$=\frac{\omega^4}{1+\omega^2}=\frac{\omega}{-\omega}=-1$$

$\therefore\ \ f(1)+f(2)+\cdots+f(8)$

$=(-1+-1+\frac{1}{2})+(-1+-1+\frac{1}{2})+(-1+-1)$

$=-5$

4. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=xy \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=0 \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y$ 의 합 $x+y$ 의 값은? (단, $xy \neq 0$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=0$ 에서

$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}$ 이므로

$x+y=u,\ xy=v$ 라 하면

주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u-v=0 \cdots ㉠ \\ \dfrac{u^2-2v}{v}=0 \quad \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{u^2-2v}{v}=\dfrac{v(v-2)}{v}=0$

$\therefore\ v=0$ 또는 $v=2$

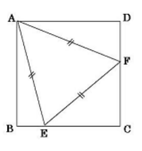
그런데 주어진 조건에서

$v=xy\neq 0$ 이므로 $v=2$ 이다.

따라서, ㉠에서 $u=v=2$ 이므로

$x+y=2$

5. 아래 그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정사각형 ABCD 가 있다. 변 BC, CD 위에 각각 점 E, F 를 잡아 △AEF 가 정삼각형이 되도록 할 때, $\overline{\mathrm{BE}}$의 길이를 구하면?



① $4-2\sqrt{3}$ ② $3-\sqrt{3}$ ③ $3-2\sqrt{2}$

④ $3-\sqrt{2}$ ⑤ $2-\sqrt{2}$

해설

$\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{DF}}=x,\ \overline{\mathrm{EC}}=\overline{\mathrm{FC}}=y$라 하면,

$x+y=2$

$\overline{\mathrm{AE}}$ 는 (△ABE 가 직각삼각형이므로)

$\overline{\mathrm{AE}}=\sqrt{4+}x^2$

$\overline{\mathrm{EF}}$ 는 (△EFC 가 직각이등변삼각형이므로)

$\overline{\mathrm{EF}}=\sqrt{2}y$

△AEF 는 정삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{EF}}$

$\Rightarrow \sqrt{4+x^2}=\sqrt{2}y \Leftrightarrow 4+x^2=2y^2$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 4+x^2=2y^2 \end{cases}$$

을 연립하여 풀면 $x=4-2\sqrt{3}$

6. 이차방정식 $x^2-(m+1)x-m+2=0$의 두 근이 모두 정수가 되도록 하는 정수 m의 값의 합은?

① -12　② -8　③ 0　④ 8　⑤ 12

해설

두 정수근을 $\alpha,\ \beta$라 하자.
근과 계수 관계에 의해
$\alpha+\beta=m+1 \quad \alpha\beta=-m+2$
$\alpha+\beta-1=2-\alpha\beta$
$(\alpha+1)(\beta+1)=4$
$\therefore\ \ \alpha+1=\pm1 \quad \beta+1=\pm4$
$\alpha+1=\pm4 \quad \beta+1=\pm1$
$\alpha+1=\pm2 \quad \beta+1=\pm2$(복호동순)
$\therefore\ (\alpha,\ \beta)=(0,3),\ (-2,-5),\ (3,0),\ (-5,-2),\ (1,1),\ (-3,-3)$
$m=\alpha+\beta-1$이므로 $m=2,\ -8,\ 1,\ -7$
$\therefore\ 2+(-8)+1+(-7)=-12$

7. $-1 < x < 3$일 때, $A = 2x - 3$의 범위는?

① $1 < A < 3$
② $-1 < A < 3$
③ $-3 < A < 5$
④ $-5 < A < 3$
⑤ $3 < A < 5$

해설

$-1 < x < 3$에서 양변에 2를 곱하고 3을 빼면
$-2 - 3 < 2x - 3 < 6 - 3$
$\therefore\ -5 < 2x - 3 < 3$

8. x에 대한 부등식 $ax+b \le bx+a$에 대하여 다음 중 옳은 것은? (단 a, b는 실수)

① $a > b > 0$일 때, 해는 $x \ge 1$이다.

② $a < b < 0$일 때, 해는 없다.

③ $a = b$ 일 때, 해는 모든 실수이다.

④ $a = b$ 일 때, 해는 없다.

⑤ $a = b$ 일 때, 해는 $x > 1$ 이다.

해설

$ax+b \le bx+a$ 에서 $(a-b)x \le a-b$

(i) $a > b$일 때, $a-b > 0$이므로 $x \le \dfrac{a-b}{a-b}$

$\therefore x \le 1$

(ii) $a = b$ 일 때, $a-b = 0$이므로 $0 \cdot x \le 0$

$\therefore$ 해가 무수히 많다

(iii) $a < b$일 때, $a-b < 0$이므로 $x \ge \dfrac{a-b}{a-b}$

$\therefore x \ge 1$

(i), (ii), (iii) 에서 해는 모든 실수

9. $x+3y=5$, $4y+3z=6$ 일 때, 부등식 $x<3y<5z$ 를 만족시키는 x 의 값의 범위를 구하면?

① $\frac{5}{6}<x<\frac{10}{9}$　② $\frac{30}{29}<x<\frac{5}{3}$　③ $\frac{55}{29}<x<\frac{5}{2}$
④ $\frac{5}{2}<x<\frac{90}{29}$　⑤ $-\frac{90}{29}<x<-\frac{5}{2}$

해설

$x+3y=5$를 y에 관하여 풀면

$y=\frac{5-x}{3}$

$4y+3z=6$을 z에 관하여 풀면

$z=\frac{6-4y}{3}=2-\frac{4}{3}y$

$y=\frac{5-x}{3}$을 대입하면

$z=2-\frac{4}{3}\times\frac{5-x}{3}=2-\frac{20-4x}{9}=\frac{4x-2}{9}$

$y=\frac{5-x}{3}$, $z=\frac{4x-2}{9}$를 부등식에 대입하면

$x<5-x<5\times\frac{4x-2}{9}$

$x<5-x$, $2x<5$

$x<\frac{5}{2}$ ⋯㉠

$5-x<\frac{5(4x-2)}{9}$, $45-9x<20x-10$,

$\frac{55}{29}<x$ ⋯㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{55}{29}<x<\frac{5}{2}$

10. 연립부등식 $2x-3 \le 4x$, $4x-10 < x+2$ 의 모든 해는 $\frac{x+a}{2} > \frac{x+2a}{3}$ 를 만족할 때, 상수 a 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a < -\frac{3}{2}$

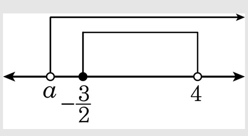
해설

연립부등식 $2x-3 \le 4x$, $4x-10 < x+2$ 을 풀면

$\therefore\ -\frac{3}{2} \le x < 4$

$\frac{x+a}{2} > \frac{x+2a}{3}$ 를 정리하면 $x > a$

$-\frac{3}{2} \le x < 4$ 의 모든 해가 $x > a$ 를 만족하려면



위의 그림과 같아야 하므로 $a < -\frac{3}{2}$ 이다.