1. 다음 중 명제가 아닌 것은?

① $2(x-3)=-x+5+3x$

② $x>-1$이면 $x>0$이다.

③ x가 실수이면 $x^2\ge 0$이다.

④ $x^2+4x-5=0$

⑤ $x=2$이면 $x^3=8$이다.

해설

참인 명제 : ③, ⑤

거짓인 명제 : ①, ②

④의 경우 $x=-5$ 또는 $x=1$일 때는 참이고, 그 외의 경우는 거짓이므로 명제가 아니다.

2. 다음 중 명제 '$x+y \geq 2$ 이고 $xy \geq 1$ 이면, $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$ 이다.' 가 거짓임을 보이는 반례는?

① $x=1,\ y=\frac{1}{2}$　　② $x=100,\ y=\frac{1}{2}$
③ $x=1,\ y=1$　　④ $x=2,\ y=4$
⑤ $x=-1,\ y=-5$

해설

$x+y \geq 2,\ xy \geq 1$ 는 만족하지만, $x \geq 1, y \geq 1$ 은 만족하지 않는 반례를 찾는다.
$\therefore x=100, y=\frac{1}{2}$ 일 때, 거짓이다.

3. 다음 명제 중 '역'이 참인 것을 고르면? (a, b, x, y 는 모두 실수)

① $a=1$ 이면 $a^2=a$

② $a=b$ 이면 $a^2=b^2$

③ xy 가 홀수 이면 $x+y$ 가 짝수

④ $\triangle ABC$ 가 정삼각형이면 $\angle B=\angle C$

⑤ 두 집합 A, B 에 대하여 $A \supset B$ 이면 $A \cup B = A$

해설

① 역 : $a^2=a$ 이면 $a=1$ 이다.(거짓, 반례 : $a=0$)
② 역 : $a^2=b^2$ 이면 $a=b$ 이다. (거짓, 반례 : $a=1, b=-1$)
③ 역 : $x+y$ 가 짝수이면, xy 는 홀수이다. (거짓, x, y 모두 짝수인 경우 xy 는 짝수이다.)
④ 역 : $\angle B=\angle C$ 이면 $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다. (거짓, 두 각이 같으면 이등변삼각형이다.)
⑤역 : $A \cup B = A$ 이면 $A \supset B$ 이다.(참)

4. 명제「내일 소풍가지 않으면, 비가 온다.」의 대우는?

① 내일 소풍가면, 비가 오지 않는다.

② 내일 비가 오면, 소풍 가지 않는다.

③ 내일 비가 오지 않으면, 소풍 간다.

④ 내일 소풍 가지 않으면, 비가 오지 않는다.

⑤ 내일 소풍 가면, 비가 온다.

해설

명제 '$p \rightarrow q$'의 대우는 '$\sim q \rightarrow \sim p$' 이다.
p : 소풍가지 않는다. q : 비가 온다.
따라서 $\sim q \rightarrow \sim p$: 내일 비가 오지 않으면, 소풍 간다.(여기에서 '내일'은 가정, 결론에 포함되는 것이 아니라 명제의 대전제가 되는 부분이다.)

5. $x>0,\ y>0$일 때, $(3x+4y)\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{y}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 27

해설

$x>0,\ y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$(3x+4y)\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{y}\right)$

$=3+\frac{4y}{x}+\frac{9x}{y}+12 \geq 15+2\sqrt{\frac{4y}{x}\cdot\frac{9x}{y}}$

$=15+12$

(단, 등호는 $\frac{4y}{x}=\frac{9x}{y}$, 즉 $3x=2y$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 27이다.

6. 양의 실수 a, b, c 사이에 대하여 $\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

해설

$\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$

$=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1$

$=3+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$ 에서

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$

$\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}=2$, $\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq 2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}=2$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $3+6=9$

7. 실수 $x,\ y$가 $x^2+y^2=5$를 만족할 때, $x+2y$의 최댓값 M, 최솟값 m의 합 $M+m$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (x+2y)^2$

$(x+2y)^2 \leq 5 \cdot 5$

$\therefore -5 \leq x+2y \leq 5$이므로

$x+2y$의 최댓값 $M=5$, 최솟값 $m=-5$

$\therefore\ M+n=5+(-5)=0$

8. 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은?

① 자연수 n에 대하여, n^2이 짝수이면 n도 짝수 이다.

② 자연수 n, m에 대하여 n^2+m^2이 홀수이면, nm은 짝수이다.

③ 자연수 n에 대하여, n^2이 3의 배수이면, n은 3의 배수이다.

④ a, b가 실수일 때, $a+b\sqrt{2}=0$이면, $a=0$이다.

⑤ 두 실수 a, b에 대하여, $a+b>2$이면, $a>1$ 또는 $b>1$

해설

①, ③ : n^2이 p 의 배수이면, n은 p의 배수이다. (참)
② : 대우는 'nm 은 홀수이면 n^2+m^2 이 짝수이다.' nm은 홀수, 즉 n, m 모두 홀수이면 n^2, m^2 모두 홀수이므로 n^2+m^2은 짝수이다.
$\therefore$ 주어진 명제는 참
④ 반례 : $a=2\sqrt{2}, b=-1$
※ 주의) 주어진 명제가 참일 때는 a, b가 유리수라는 조건일 때임을 명심해야 한다.
⑤ 대우 : $a \leqq 1$ 그리고 $b \leqq 1$이면 $a+b \leqq 2$ (참)

9. 다음은 명제에 대한 설명이다. 옳은 것은?

① 어떤 명제가 참이면 그 역도 반드시 참이다.
② 어떤 명제가 참이면 그 명제의 대우도 참이다.
③ 어떤 명제의 역, 대우는 참, 거짓이 항상 일치한다.
④ 어떤 명제가 참이라고 해서 그 대우가 반드시 참인 것은 아니다.
⑤ 어떤 명제의 역의 역은 대우이다.

해설

명제가 참이면 그 명제의 대우도 항상 참이고, 명제가 거짓이면 그 명제의 대우도 항상 거짓이다.

10. 다음 (   )안에 알맞은 말을 쓰시오.

이등변삼각형 ABC는 정삼각형이기 위한 (   )조건이다.

▶ 답 : <u>   조건</u>

▷ 정답 : 필요<u>조건</u>

해설

이등변삼각형이 정삼각형을 포함한다.

11. 정삼각형 ABC는 이등변삼각형 ABC이기 위한 무슨 조건인가?

① 충분조건
② 필요조건
③ 대우
④ 필요충분조건
⑤ 아무조건도 아니다.

해설

정삼각형 $\subset$ 이등변삼각형

12. 실수 x 에 대하여 $x+1=0$이 $x^2+2x+a=0$ 이 되기 위한 충분조건일 때, 상수 a 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x+1=0$이 $x^2+2x+a=0$ 이 되기 위한 충분조건이므로 명제 '$x+1=0$ 이면 $x^2+2x+a=0$ 이다.' 가 참이다.
$x+1=0$ 에서 $x=-1$ 을 $x^2+2x+a=0$ 에 대입하면
$(-1)^2+2\cdot(-1)+a=1-2+a=0$
$\therefore a=1$

13. $0 < a < 1$일 때, $P = \frac{1}{a}$, $Q = \frac{1}{2-a}$, $R = \frac{a}{2+a}$의 대소 관계로 옳은 것은?

① $P < R < Q$　　② $R < Q < P$　　③ $Q < P < R$

④ $Q < R < P$　　⑤ $R < P < Q$

해설

i) $\frac{1}{a} - \frac{1}{2-a} = \frac{2-a-a}{a(2-a)} = \frac{2(1-a)}{a(2-a)}$

이 때 $a > 0,\ 2-a > 0,\ 1-a > 0$ 이므로

$\frac{2(1-a)}{a(2-a)} > 0 \qquad \therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{2-a}$

즉, P>Q

ii) $\frac{1}{a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a^2}{a(2+a)} = \frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)}$

이 때 $a > 0$, $2+a > 0$, $a-2 < 0, a+1 > 0$ 이므로

$\frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)} > 0 \qquad \therefore \frac{1}{a} > \frac{a}{2+a}$

즉, P>R

iii) $\frac{1}{2-a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a(2-a)}{(2-a)(2+a)}$

$= \frac{2+a-2a+a^2}{(2-a)(2+a)} = \frac{a^2-a+2}{(2-a)(2+a)}$

이 때 $2-a > 0, 2+a > 0, a^2-a+2 > 0$이므로 $\frac{1}{2-a} > \frac{a}{2+a}$

$\therefore Q > R$ 따라서, $P > Q > R$이다.

14. 두 양수 a, b에 대하여 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것은?

① a, b의 산술 평균은 $\dfrac{a+b}{2}$이다.

② $\sqrt{ab}$는 a, b의 기하평균이다.

③ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$은 절대부등식이다.

④ $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$이면 반드시 $b = \dfrac{1}{a}$이다.

⑤ $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$는 항상 성립한다.

해설

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \cdots$ 절대부등식

$\dfrac{a+b}{2}$: 산술평균, $\sqrt{ab}$: 기하평균

④: 절대부등식의 등호는 $a = b$일 때 성립한다.

15. $x>3$일 때 $\dfrac{3}{x-3}+2+3x$의 최솟값은?

① 3 ② 5 ③ 12 ④ 15 ⑤ 17

해설

$\dfrac{3}{x-3}+2+3x=3(x-3)+\dfrac{3}{x-3}+11$

이 때, $x>3$이므로 $3(x-3)>0$, $\dfrac{3}{x-3}>0$

산술평균과 기하평균에 의해

$3(x-3)+\dfrac{3}{x-3}+11$

$\geq 2\sqrt{3(x-3)\cdot\dfrac{3}{x-3}}+11$

$=2\cdot 3+11=17$

(단, 등호는 $3(x-3)=\dfrac{3}{x-3}$, 즉 $x=4$일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

16. 「모든 중학생은 고등학교에 진학한다」의 부정인 명제는?

① 고등학교에 진학하는 중학생은 없다.

② 어떤 중학생은 고등학교에 진학한다.

③ 중학생이 아니면 고등학교에 진학하지 않는다.

④ 모든 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

⑤ 어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

해설

부정이란 'p 이면 q 이다' 가 'p 이면 q 가 아니다' 이고, '모든' 의 부정은 '어떤' 이므로 '모든 중학생은(p) 고등학교에 진학한다(q)' 의 부정은 '어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다' 이다.

17. 다음 명제 중 참인 것은? (단, x, y, z 는 실수이다.)

① $xz = yz$ 이면 $x = y$ 이다.
② $x + y > 0$, $xy > 0$ 이면 $x > 0$ 이고 $y > 0$ 이다.
③ x 가 3 의 배수이면 x 는 9 의 배수이다.
④ $x^2 + y^2 \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이다.
⑤ 삼각형 ABC 가 이등변삼각형이면 정삼각형이다.

해설

② $xy > 0$ 이면, x 와 y 의 부호가 같다는 것인데 $x + y > 0$ 이려면 둘 다 양수여야 하므로 참이다.

18. 명제 「$0 < x < 1$ 이면 $|x-a| < 1$ 이다.」가 참이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구할 때 정수의 개수는 ?

① 1개 ② 2개 ③ 0개 ④ 3개 ⑤ 5개

해설

$|x-a| < 1$에서 $-1 < x-a < 1$

$\therefore a-1 < x < a+1$

$\{x \mid 0 < x < 1\} \subset \{x \mid a-1 < x < a+1\}$ 이어야 한다.

$\therefore a-1 \leq 0,\ a+1 \geq 1$ 에서 $0 \leq a \leq 1$

$\therefore\ a = 0,\ 1$

$\therefore$ 정수의 개수는 2개

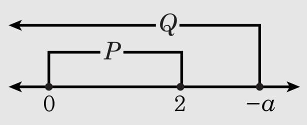
19. 실수 x에 대한 두 조건 p : $0 \le x \le 2$, q : $x+a \le 0$이 있다. 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하면 $p \rightarrow q$가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P = \{x|0 \le x \le 2\}$, $Q = \{x|x \le -a\}$



위의 그림에서 $P \subset Q$이려면 $2 \le -a$, $a \le -2$ 따라서 a의 최댓값은 -2

20. 두 실수 x, y에 대하여 다음 명제가 참일 때, 실수 k의 최솟값을 구하여라.

$x+y<8$이면 $x<-2$ 또는 $y<k$

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
따라서 $x \geq -2$이고 $y \geq k$이면 $x+y \geq 8$
$x \geq -2$, $y \geq k$에서 $x+y \geq k-2$이므로
$k-2 \geq 8$, $\therefore$ $k \geq 10$
따라서 k의 최솟값은 10이다.

21. $x,\ y$ 가 실수일 때, 다음 중에서 조건 p가 조건 q 이기 위한 필요충분인 것은 ?

① $p : x+y \geq 2,\ q : x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$

② $p : x+y$는 유리수이다., $q : x,\ y$는 유리수이다.

③ $p : xy > x+y > 4,\ q : x > 2$이고 $y > 2$

④ $p : xy+1 > x+y > 2,\ q : x > 1$이고 $y > 1$

⑤ $p : xyz = 0,\ q : xy = 0$

해설

① $p : x+y \geq 2 \Rightarrow q : x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$ (반례 : $x = 2,\ y = -1$)
② $p : x+y$ 는 유리수이다. $\Rightarrow q : x,\ y$는 유리수이다. (반례 : $x = 1 - \sqrt{2},\ y = 1 + \sqrt{2}$)
③ $p : xy > x+y > 4 \Rightarrow q : x > 2$ 이고 $y > 2$ (반례 : $x = 4,\ y = 2$)
④ $p : xy+1 > x+y > 2 \Leftrightarrow q : x > 1$ 이고 $y > 1$
⑤ $p : xyz = 0 \Rightarrow q : xy = 0$ (반례 : $x = 1,\ y = 1,\ z = 0$)

22. 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $a>0,\ b>0$ 이면 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

② 모든 실수 a,b 에 대하여 $|a|+|b|>a+b$

③ 모든 실수 a,b 에 대하여 $a^2+b^2>ab$

④ 모든 실수 a,b 대하여 $|a-b|\leq|a|-|b|$

⑤ $a>b>0$ 일 때, $\sqrt{a-b}<\sqrt{a}-\sqrt{b}$

해설

① : $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$, 양변을 제곱하면
$a+b+2\sqrt{ab}>a+b$
$\Rightarrow\ 2\sqrt{ab}>0$ (참)
② ④ ⑤ : 모두 양변을 제곱하여 정리해 본다.
③ : (반례) $a=0,\ b=0$

23. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : ____개

▷ 정답 : 2개

해설

$$\frac{2^{50}}{50^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$\therefore n = 1,\ 2$

n의 갯수는 2개이다.

24. 다음 중 절대부등식 $a^2+ab+b^2 \geq 0$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $a=b$　　② $ab>0$　　③ $a=b=0$

④ $a>b$　　⑤ $b>a$

해설

$a^2+b^2+ab = a^2+ab+\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{4}b^2$

$= \left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geq 0$ ($\because$ $\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2 \geq 0,\ \frac{3}{4}b^2\ 0$)

$\therefore a^2+b^2 \geq ab$

단, 등호는 $a+\frac{1}{2}b=0$ 이고 $b=0$

즉,$a=0$ 이고 $b=0$일 때, 성립한다.

25. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$

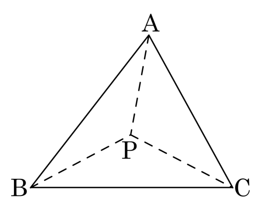
$x^2+y^2=10$이므로 $100 \geq (x+3y)^2$

$\therefore \ -10 \leq x+3y \leq 10$

$\therefore \ M=10, \ m=-10$

$\therefore \ M-m=10-(-10)=20$

26. 넓이가 a 인 삼각형 ABC 의 내부에 한 점 P 에 대하여 $\triangle$PAB, $\triangle$PBC, $\triangle$PCA 의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3 이라 할 때 $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ 의 최솟값은?



① $\dfrac{a^2}{3}$　② a^2　③ $\sqrt{3}a^2$
④ $3a^2$　⑤ $3\sqrt{3}a^2$

해설

$S_1 + S_2 + S_3 = a$
$(1^2 + 1^2 + 1^2)(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \geq (S_1 + S_2 + S_3)^2 = a^2$
$\therefore S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \geq \dfrac{a^2}{3}$

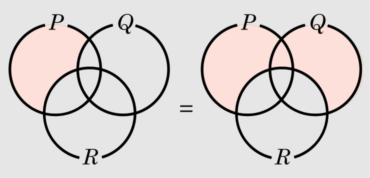
27. 조건 p, q, r을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R이라고 하자. $P-(Q\cup R)=(P\cup Q)-R$ 가 성립할 때, 다음 명제 중 반드시 참이 되는 것은?

① $p\to q$　　② $r\to q$　　③ $q\to p$

④ $p\to r$　　⑤ $q\to r$

해설

$P-(Q\cup R)=(P\cup Q)-R$ 벤다이어그램으로 나타내면



$Q\cup R=R\leftrightarrow Q\subset R$ $\therefore$ $q\to r$ 가 참이다.

28. 한 쪽 면에는 영문자, 다른 쪽 면에는 숫자가 적혀있는 카드가 다음 규칙을 만족한다.

카드의 한 쪽 면에 모음이 적혀 있으면 다른 쪽 면에는 짝수가 적혀 있다.

탁자 위에 그림과 같이 놓인 카드 4 장이 위 규칙에 맞는 카드인지 알기 위해 다른 쪽 면을 확인해야 할 필요가 있는 것은?

$\boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{d}\ \boxed{e}$

① $\boxed{2}\ \boxed{d}$

② $\boxed{2}\ \boxed{e}$

③ $\boxed{3}\ \boxed{d}$

④ $\boxed{3}\ \boxed{e}$

⑤ $\boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{d}\ \boxed{e}$

해설

(모음 → 짝수) ↔ (홀수 → 자음) 이므로 모음인 면을 뒤집어 짝수가 있음을 확인하고 홀수인 면을 뒤집어 자음이 있음을 확인하면 된다. 자음인 면의 뒤에는 어떤 수가 와도 좋고 짝수인 면의 뒤에는 모음, 자음이 모두 가능하다. 따라서 모음이 쓰여진 카드 $\boxed{e}$, 홀수가 쓰여진 카드 $\boxed{3}$ 의 다른 쪽 면을 확인해야 한다.

29. 다음은 명제 'xy 가 3의 배수이면 x, y 중 적어도 하나는 3의 배수이다.(단, x, y 는 정수이다.)' 가 참임을 대우를 이용하여 증명한 것이다. (가)~(마) 에 들어갈 말로 <u>틀린</u> 것은?

> 주어진 명제의 대우는 'x, y 가 모두 (가)가 아니면 xy 는 (가)가 아니다.' 이다. 이것이 참임을 보이자.
> x, y 가 모두 (나)가 아니면 x, y 를 각각 $x = 3m \pm 1$, $y = 3n \pm 1$ (단, m, n 은 정수)로 나타낼 수 있다.
> 이때, (다) $= (3m \pm 1)(3n \pm 1)$
> $= 9mn \pm 3m \pm 3n + 1$
> $= 3(3mn \pm m \pm n) + 1$
> 또는 (다) $= (3m \pm 1)(3n \mp 1)$
> $= 9mn \mp 3m \pm 3n - 1$
> $= 3(3mn \mp m \pm n) - 1$
> 이다. 그리고 m, n 이 정수이므로
> $3mn \pm m \pm n$, $3mn \mp m \pm n$ 도 정수이다.
> 따라서, (다)는 3의 배수가 아니다. 즉, 주어진 명제의 대우는 (라)이다.
> 그러므로 주어진 명제는 (마)이다.

① (가) 3의 배수　② (나) 3의 배수　③ (다) xy
④ (라) 참　⑤ (마) 거짓

해설

대우가 참이므로 명제 역시 참이다.

30. 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하자. $\sim q$가 p이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P^c \subset Q$ ② $Q \subset P$ ③ $Q - P = \phi$

④ $P - Q = P$ ⑤ $P - Q = \phi$

해설

$p \rightarrow \sim q$이므로 진리집합으로 표현하면, $P \subset Q^c$ 이다.
즉, $P \cap Q^c = P \Rightarrow P - Q = P$

31. 세 조건 $p,\ q,\ r$ 에 대하여 $\sim p \Rightarrow q,\ r \Rightarrow \sim q$ 일 때, 조건 p 가 r 이기 위한 필요충분조건이려면 다음 중 어떤 조건이 더 필요한가?

① $p \Rightarrow q$　　② $q \Rightarrow r$　　③ $p \Rightarrow r$

④ $\sim q \Rightarrow p$　　⑤ $\sim r \Rightarrow p$

해설

$r \Rightarrow \sim q$ 이므로 $q \Rightarrow \sim r$

$\sim p \Rightarrow q$ 이고 $q \Rightarrow \sim r$ 이므로 삼단논법에 의하여 $\sim p \Rightarrow \sim r$

$\therefore\ r \Rightarrow p$

따라서, $p \Leftrightarrow r$가 되려면 $r \Rightarrow p$ 이외에 $p \Rightarrow r$ 가 더 필요하다.

32. x가 실수일 때, $\dfrac{x^2-x+1}{x^4-2x^3+3x^2-2x+2}$ 의 최댓값은?

① $-\dfrac{3}{2}$　② $-\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\dfrac{3}{2}$　⑤ 2

해설

$x^4-2x^3+3x^2-2x+2$

$=x^4-2x^3+3x^2-2x+1+1$

$=x^2\left(x^2-2x+3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)+1$

$=x^2\left\{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+3\right\}+1$

$=x^2\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+1\right\}+1$

$=x^2\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right)^2+1$

$=(x^2-x+1)^2+1$

$\therefore$ 준식 $=\dfrac{x^2-x+1}{(x^2-x+1)^2+1}$ 이고

$x^2-x+1=\left(x^2-x+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{3}{4}$

$=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ 이므로

$x^2-x+1=t$ 로 치환 $t\ge\dfrac{3}{4}$ 하면

준 식 : $\dfrac{t}{t^2+1}=\dfrac{1}{\frac{t^2+1}{t}}=\dfrac{1}{t+\frac{1}{t}}$

여기서 $t+\dfrac{1}{t}\ge 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$

$(\because\ t\ge\dfrac{3}{4})$

따라서 $\dfrac{t^{-1}+1}{t}$ 의 최솟값은 2 이고

$\dfrac{t}{t^2+1}$ 의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$ 이다.

33. 다음의 Ⅰ, Ⅱ에서 p가 q이기 위한 충분조건이면 1, 필요조건이면 3, 필요충분조건이면 7, 아무 조건도 아니면 0의 값을 주기로 하자.

> Ⅰ. p : $ab < 0$
> q : 두 부등식 $a > b$, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$이 동시에 성립한다.
> Ⅱ. p : $a + b - 1 < 0$
> q: 이차방정식 $x^2 - ax - b = 0$이 허근을 갖는다.

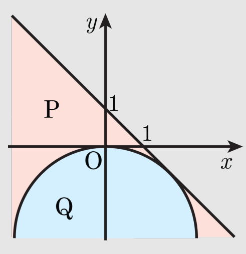
a, b가 실수일 때, Ⅰ, Ⅱ에 주어지는 두 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

Ⅰ. q의 두 부등식이 동시에 성립하기 위해서는



$a - b > 0$이고 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$

$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0$에서 $ab < 0$이고

$a > b$이므로

$a > 0$, $b < 0$

역으로, $a > 0$, $b < 0$이면 $a > b$이고

$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

즉, 두 부등식이 동시에 성립하기 위한 필요충분조건은 $a > 0$, $b < 0$이다.

그런데 $ab < 0 \Leftrightarrow (a < 0,\ b > 0)$ 또는 $(a > 0,\ b < 0)$이므로

p는 q이기 위한 필요조건이다.

Ⅱ. 이차방정식 $x^2 - ax - b = 0$이 허근을 갖기 위한 필요충분조건은

$D = a^2 + 4b < 0$, $P = \{(a,\ b) | a + b - 1 < 0\}$

$\mathrm{Q} = \{(a,\ b) | a^2 + 4b < 0\}$라 놓고 두 집합을 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다. 즉, $\mathrm{Q} \subset \mathrm{P}$

따라서, p는 q이기 위한 필요조건이다.

따라서, 구하는 두 값의 합은 6이다.