1. $A = 2x^2 + 5xy - 3y^2, B = 4x^2 - 5xy + y^2, C = -x^2 + 4y^2$ 일 때, $2A - \{B - (2C - 3A)\}$를 간단히 하면?

① $8x^2 + 30xy - 24y^2$

② $8x^2 - 30xy - 24y^2$

③ $-8x^2 + 30xy - 24y^2$

④ $-8x^2 + 10y^2$

⑤ $-8x^2 - 10y^2$

해설

$$\begin{aligned} 2A - \{B - (2C - 3A)\} &= 2A - B + 2C - 3A \\ &= -A - B + 2C \\ &= -8x^2 + 10y^2 \end{aligned}$$

2. $x^2y(-xy)^3$을 간단히 하면?

① $-x^4y^5$ ② xy^5 ③ $-x^5y^4$ ④ $-xy^5$ ⑤ x^2y^5

해설

$$x^2y(-xy)^3 = x^2y(-x^3y^3) = -x^5y^4$$

3. 다항식 $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ 을 전개하면?

① a^2-b^2

② a^3-b^3

③ a^3+b^3

④ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

⑤ $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

해설

공식 : $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

4. 다음 등식 중에서 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하는 것을 모두 고르면?

① $(x-2)(x+2)=x^2-4$　　② $x^2-x=x(x+2)$

③ $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$　　④ $x(x-2)=0$

⑤ $x+y=x-y$

해설

②는 $x=0$일 때만 성립하고,
④는 $x=0, 2$일 때만 성립한다.
그리고 ⑤는 $y=0$일 때만 성립한다.
①과 ③은 모든 실수에 대하여 성립한다.

5. 다음 식이 x에 대한 항등식이 되도록 A, B의 값을 정할 때, $A+B$의 값을 구하여라.

$$4x-6=A(x+1)-B(x-1)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

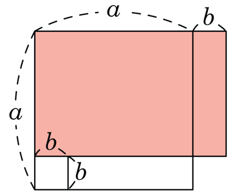
해설

x에 대한 항등식이므로 x의 값에 관계없이 항상 성립한다.
따라서 $x=-1$을 양변에 대입하면,
$4\times(-1)-6=A(-1+1)-B(-1-1)$
$-10=2B \quad \therefore \ B=-5$
또, $x=1$을 양변에 대입하면,
$4\times1-6=A(1+1)-B(1-1)$
$-2=2A \quad \therefore \ A=-1$
$\therefore \ A=-1, \ B=-5$
$\therefore \ A+B=-6$

해설

우변을 전개해서 내림차순으로 정리하면,
$4x-6=(A-B)x+A+B$
$\therefore A+B=-6$

6. 다음 그림에서 색칠한 부분이 나타내고 있는 곱셈공식은 무엇인가?



① $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

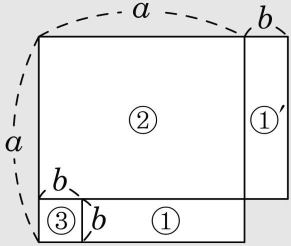
② $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

③ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

④ $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

⑤ $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$

해설



$(a+b)(a-b) =$ ①′ + ②

①′ = ① 이므로

$(a+b)(a-b) =$ ① + ② $= a^2 - b^2$

$\therefore\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

7. 다항식 $6x^3-7x^2+17x-3$을 $3x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때, $Q(1)+R$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$6x^3-7x^2+17x-3=(3x-2)Q(x)+R$

양변에 $x=1$을 대입하면, $13=Q(1)+R$

$\therefore\ Q(1)+R=13$

해설

$6x^3-7x^2+17x-3$를 $3x-2$로 직접 나누거나 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구할 수 있다.

8. 다항식 $x^4 - 3x^2 + ax + 5$를 $x+2$로 나누면 나머지가 3이다. a의 값은?

① 0 ② 2 ③ 3 ④ -2 ⑤ -3

해설

$x^4 - 3x^2 + ax + 5 = f(x)$라 놓자.

$f(-2) = 3$에서 $-2a + 9 = 3$

$\therefore\ a = 3$

9. $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + x + 2)(x^2 + ax + b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌 변}) &= (x^2 + 2)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)\end{aligned}$$

$\therefore\ a = -1,\ b = 2$

$\therefore ab = -1 \times 2 = -2$

10. 등식 $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x+a)(x+b)(x+c)$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

조립제법을 사용한다

1	1	4	1	-6
		1	5	6
-2	1	5	6	0
		-2	-6	
-3	1	3	0	
		-3		
	1	0		

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x+2)(x+3)$

$\therefore a+b+c = 4$

11. 두 다항식 x^3-3x^2+2x, $x^4-4x^3+4x^2$의 최대공약수와 최소공배수를 각각 $f(x), g(x)$라 할 때, $f(3)+g(3)$의 값을 구하면?

① 18　② 19　③ 20　④ 21　⑤ 22

해설

$x^3-3x^2+2x=x(x-2)(x-1)$

$x^4-4x^3+4x^2=x^2(x-2)^2$

$\therefore f(x)=x(x-2), g(x)=x^2(x-1)(x-2)^2$

$\therefore f(3)+g(3)=3+18=21$

12. 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 할 때, $xf(x)-3$을 $x+1$로 나눈 몫과 나머지는?

① $xQ(x), -R-3$

② $xQ(x), -R+3$

③ $xQ(x), -R-6$

④ $xQ(x)+R, -R-3$

⑤ $xQ(x)+R, -R+3$

해설

$$f(x)=(x+1)Q(x)+R$$

$$\therefore\ xf(x)=x(x+1)Q(x)+xR$$

$$\begin{aligned}\therefore\ xf(x)-3 &= x(x+1)Q(x)+xR-3\\ &=(x+1)\left\{xQ(x)\right\}+(x+1)R-R-3\\ &=(x+1)\left\{xQ(x)+R\right\}-R-3\end{aligned}$$

13. 두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값은?

① 4^3-5^3 ② 3^3-3^4 ③ 0

④ 1 ⑤ -1

해설

두 다항식이 $1+x+x^2+x^3$을 포함하고 있으므로 $1+x+x^2+x^3=A$라 놓으면

$(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$

$=(A+x^4)^3$

$=A^3+3A^2x^4+3Ax^8+x^{12}$

$=A^3+(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$

이 때 $(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$은 x^3 항을 포함하고 있지 않으므로 두 다항식의 x^3 의 계수는 같다.

$\therefore\ a-b=0$

14. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 겉넓이는 52이고, 모서리의 길이의 합은 36이다. 이 상자의 대각선의 길이는?

① 5 ② $\sqrt{29}$ ③ $\sqrt{33}$ ④ 6 ⑤ $\sqrt{42}$

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c라 하면

$2(ab+bc+ca)=52$

$4(a+b+c)=36 \;\rightarrow\; a+b+c=9$

(직육면체 대각선의 길이)

$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$=\sqrt{(a+b+c+)^2-2(ab+bc+ca)}$

$=\sqrt{81-52}=\sqrt{29}$

15. $(m^2-4)x-1=m(3x+1)$를 만족하는 x가 없도록 하는 상수 m의 값은?

① -1 ② -2 ③ -4 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(m^2-3m-4)x-1-m=0$의 해가 없으므로

$m^2-3m-4=0$ 이고 $-m-1\neq 0$

$\therefore m=4$

16. $(4x^2-3x+1)^5(x^3-2x^2-1)^4$을 전개했을 때, 계수들의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 512

해설

$(4x^2-3x+1)^5(x^3-2x^2-1)^4 = ax^{22}+bx^{21}+\cdots+c$

위의 식에 $x=1$을 대입하면, 모든 계수들의 총합이 나온다.

$\therefore$ (계수의 총합) $= 2^5 \times (-2)^4 = 512$

17. $\dfrac{2004^3 - 2003^3 - 1}{2003 \times 2004}$ 의 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$2003 = x$라 두면 $2004 = x + 1$

$$(\text{준 식}) = \frac{(x+1)^3 - x^3 - 1}{x(x+1)}$$

$$= \frac{3x(x+1)}{x(x+1)} = 3$$

18. $x^4+2x^2+9=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$로 인수분해될 때, $|ab-cd|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= (x^2+3)^2-(2x)^2 \\
&= (x^2+2x+3)(x^2-2x+3)
\end{aligned}
$$

여기서 계수를 비교하면

$a=2,\ b=3,\ c=-2,\ d=3$

$\therefore |ab-cd|=|2\times 3-(-2)\times 3|=12$

19. x에 대한 두 다항식 $A = x^3 + ax^2 + bx$와 $B = x^2 + bx + a$의 최대공약수가 일차식이다. 그 최대공약수를 구하면? (단, a, b는 상수이고 $ab \neq 0$)

① $x-1$ ② $x-2$ ③ $x+1$ ④ $x+2$ ⑤ $x+3$

해설

$A(x) = x(x^2 + ax + b),\ B(x) = x^2 + bx + a$

인수를 $(x-p)$로 놓으면

$A(p) = 0$에서 $p^3 + ap^2 + bp = 0 \cdots$ ㉠

$B(p) = 0$에서 $p^2 + bp + a = 0 \cdots$ ㉡

㉠ $-$ ㉡ $\times\, p$에서 $(a-b)p^2 + (b-a)p = 0$

$\therefore\ (a-b)p(p-1) = 0$

그런데 $a \neq 0$이므로 $p \neq 0$

$\therefore\ p = 1$

따라서 최대공약수는 $x-1$

20. 최고차항의 계수가 1인 두 다항식 $f(x), g(x)$의 곱이 $x^3 + x^2 - 5x + 3$이고, 최소공배수가 $x^2 + 2x - 3$일 때, $f(2) + g(2)$의 값을 구하면?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$f(x)g(x) = (x-1)^2(x+3)$,
$L = (x-1)(x+3)$ 이므로
$f(x) = (x-1),\ g(x) = (x-1)(x+3)$
(또는 그 반대일 수 있으나 문제 의도상 상관없음)
$\therefore\ f(2) + g(2) = 1 + 5 = 6$

21. 정식 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때 3이 남고, x^2-4x+3으로 나눌 때 $3x$가 남는다. $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때, 나머지를 구하면?

① $6x-1$　② $6x-2$　③ $6x-3$

④ $6x-5$　⑤ $6x-9$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q_1(x)+3 \\ &= (x-1)(x-2)Q_1(x)+3 \cdots\cdots ㉠ \\ f(x) &= (x^2-4x+3)Q_2(x)+3x \\ &= (x-1)(x-3)Q_2(x)+3x \cdots\cdots ㉡ \\ f(x) &= (x^2-5x+6)Q(x)+ax+b \\ &= (x-2)(x-3)Q(x)+ax+b \cdots\cdots ㉢ \end{aligned}$$

㉠, ㉢에서 $f(2)=3=2a+b$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉡, ㉣에서 $f(3)=9=3a+b$ $\cdots\cdots$ ㉤

$\therefore$ ㉣, ㉤에서 $a=6,\ b=-9$

$\therefore$ 나머지는 $6x-9$

22. 다항식 $x^{51}+30$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하자. 이때, $Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하면?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

$x^{51}+30=(x+1)Q(x)+R$ 이라 하면

$x=-1$을 대입하면 $R=29$

$x^{51}+30=(x+1)Q(x)+29$

$Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$Q(1)$, $x=1$식에 대입

$31=2Q(1)+29$

$\therefore\ Q(1)=1$

23. x 의 다항식 $f(x) = x^5 - ax - 1$이 계수가 정수인 일차인수를 갖도록 정수 a의 값을 구하면?

① $a = 0$ 또는 2　② $a = 1$ 또는 2　③ $a = -1$ 또는 2

④ $a = 0$ 또는 1　⑤ $a = 0$ 또는 -2

해설

상수항이 -1 이므로 만일 일차인수가 있다면 그것은 $x-1$ 또는 $x+1$ 뿐이다.

(i) $f(1) = 1 - a - 1 = 0$ 에서 $a = 0$

(ii) $f(-1) = -1 + a - 1 = 0$ 에서 $a = 2$

24. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$$[x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y]$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y$$
$$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x-y)+2(x+y)(x-y)+(x-y)$$
$$=(x-y)\{(x+y)^2+2(x+y)+1\}$$
$$=(x-y)(x+y+1)^2$$
$$p=-1, q=1, r=1$$
$$\therefore\ p^2+q^2+r^2=3$$

25. $\sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1}$ 은 자연수이다. 이 때, 각 자리의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x = 21$ 이라 하면

$\sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1}$

$= \sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}$

$= \sqrt{\{x(x+3)\}(x+1)(x+2)+1}$

$= \sqrt{(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1}$

$= \sqrt{(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1}$

$= \sqrt{\{(x^2+3x)+1\}^2}$

$= x^2+3x+1 \ (\because (x^2+3x)+1>0)$

$= 21^2 + 3 \cdot 21 + 1 = 505$

각자리 숫자의 합은 $5+0+5=10$