1. 자연수 k의 배수를 원소로 하는 집합을 A_k라 할때, $(A_4 \cap A_6) \supset A_k$인 k의 최솟값을 a라 하고 $(A_8 \cup A_{12}) \subset A_k$인 k 의 최댓값을 b라 할 때 $a+b$의 값은 ?

① 16 ② 20 ③ 10 ④ 15 ⑤ 27

해설

$(A_4 \cap A_6) \supset A_k$ 인 k 는 4 와 6 의 공배수이므로 k 의 최솟값은 4 와 6 의 최소공배수 12 이다. $(A_8 \cup A_{12}) \subset A_k$ 인 k 는 8 과 12 의 공약수이므로 k 의 최댓값은 8과 12 의 최대공약수 4이다.
$\therefore$ 최솟값 a는 12 이고 최댓값 b는 4이므로 $a+b=12+4=16$

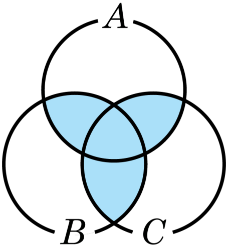
2. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A * B = (A \cup B)^c$으로 정의할 때, 다음 중 $(B * A) * B$와 항상 같은 것은?

① A　② B　③ $A - B$　④ $B - A$　⑤ A^c

해설

$$(B * A) * B = ((BUA)^c \cup B)^c = (B \cup A) \cap B^c$$
$$= (A \cup B) - B = A - B$$

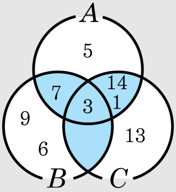
3. 다음 그림에서 세 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, 14\}$, $B = \{3, 6, 7, 9\}$, $C = \{1, 3, 13, 14\}$ 일 때, 색칠한 부분의 집합을 원소나열법으로 나타낸 것은?



① $\{1\}$ ② $\{1, 3\}$ ③ $\{1, 3, 5, 7\}$

④ $\{1, 3, 7, 14\}$ ⑤ $\{1, 3, 9, 14\}$

해설



따라서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 $\{1, 3, 7, 14\}$ 이다.

4. 실수 전체 집합에서 함수 $f(x)$ 를 $f(x) = \begin{cases} (a+2)x \ (x \geq 0) \\ (1-a)x \ (x < 0) \end{cases}$ 로

정의할 때, 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재할 조건은?

① $-1 < a < 1$ ② $-2 < a < 1$ ③ $a < -2,\ a > 1$

④ $-1 < a \leq 1$ ⑤ $-2 \leq a < 1$

해설

역함수가 존재하려면

$y = (a+2)x$와 $y = (1-a)x$의 기울기의 부호가 같아야 한다.

즉 $(a+2)(1-a) > 0$, $(a+2)(a-1) < 0$

$\therefore\ -2 < a < 1$

5. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x \geq 0) \\ 1-x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 으로 정의된 함수 f 에 대하여 $f^{-1}(3) + f^{-1}(a) = 0$ 을 만족시키는 a 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$f^{-1}(3) = b$ 라고 하면 $f(b) = 3$ 에서 $2b + 1 = 3$

$\therefore\ b = 1$

이 때, $f^{-1}(3) + f^{-1}(a) = 0$ 에서

$1 + f^{-1}(a) = 0,\ f^{-1}(a) = -1$

$\therefore\ f(-1) = a$

$\therefore\ a = 1 - (-1)^2 = 0$

6. 다음에서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수를 모두 고른 것은?

㉠ $f(x) = -x + 7$	㉡ $f(x) = \frac{3}{2}x$
㉢ $f(x) = -\frac{2}{x}$	㉣ $f(x) = x - 1$

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 인지 확인한다.

㉠ $(f \circ f)(x) = x$

㉡ $(f \circ f)(x) = \frac{9}{4}x$

㉢ $(f \circ f)(x) = x$

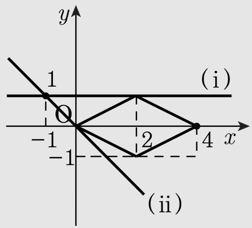
㉣ $(f \circ f)(x) = x - 2$

따라서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수는 ㉠, ㉢이다.

7. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$이 만나도록 하는 m의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설



함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는 $|x|+2|y|=2$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는 $x+2y=2$ 의 그래프에서 $x\ge 0$, $y\ge 0$ 인 부분을 각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 것이고, 이를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
직선 $y=mx+m+1$은 m의 값에 관계없이 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로 두 그래프가 만나려면
(i) $m\le 0$
(ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때
$0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m\ge -1$
(i), (ii) 에서 m 의 값의 범위는 $-1\le m\le 0$
따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.

8. 임의의 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$가 성립하는 함수 $f(x)$를 기함수라고 한다. 함수 $g(x)$와 $h(x)$가 기함수일 때, 다음 <보기>의 함수 중 기함수인 것을 모두 고르면?

Ⅰ. $g(x) \cdot h(x)$ Ⅱ. $g(x) + h(x)$ Ⅲ. $g(h(x))$

① Ⅰ ② Ⅱ ③ Ⅰ, Ⅲ
④ Ⅱ, Ⅲ ⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ

해설

Ⅰ. $g(-x) \cdot h(-x) = \{-g(x)\} \cdot \{-h(x)\}$
$= g(x)h(x)$ (우함수)

Ⅱ. $g(-x) + h(-x) = -g(x) - h(x)$
$= -\{g(x) + h(x)\}$ (기함수)

Ⅲ. $g(h(-x)) = g(-h(x))$
$= -g(h(x))$ (기함수)

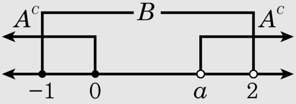
9. 실수 전체의 집합R의 두 부분집합 $A = \{x|0 < x \leq a\}$, $B = \{x|-1 \leq x < 2\}$가 $A^c \cup B = R$를 만족할 때, a의 값의 범위를 구하면? (단, $A \neq \varnothing$)

① $0 \leq a < 2$ ② $0 < a \leq 2$ ③ $0 \leq a \leq 2$

④ $0 < a < 2$ ⑤ $-1 \leq a < 5$

해설

$A \neq \varnothing$이므로, $a > 0$ 또 $A^c = \{x|x \leq 0$ 또는 $x > a\}$



위의 그림에서 $A^c \cup B = R$가 되려면, $0 < a < 2$

해설

$A^c \cup B = R \leftrightarrow A \subset B$ 임을 이용하여 구할 수 있다.

10. 임의의 두 집합 A, B 에 대하여 연산 ★를 $A \bigstar B = (A \cup B) - (A \cap B)$ 라고 정의할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $A \bigstar U = A$

② $A \bigstar A = \varnothing$

③ $\{a, b\} \bigstar \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$

④ $(A \cap B) \bigstar (A \cap C) = A \cap (B \bigstar C)$

⑤ $\varnothing \bigstar A = A$

해설

① $A \bigstar U = (A \cup U) - (A \cap U) = U - A = A^c$

② $A \bigstar A = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \varnothing$

③ $\{a, b\} \bigstar \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$

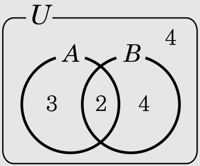
④ $(A \cap B) \bigstar (A \cap C) = A \cap (B \bigstar C)$

⑤ $\varnothing \bigstar A = (\varnothing \cup A) - (\varnothing \cap A) = A - \varnothing = A$

11. 전체집합 $U = \{x | x$는 41 이하의 소수$\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A^c \cap B) = 4$, $n(B^c) = 7$, $n(A^c \cap B^c) = 4$ 일 때, $n(A - B)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설



$n(U) = 13$ 이므로

$n(B) = n(U) - n(B^c) = 6$

$A^c \cap B = B - A$ 이므로

$n(B - A) = n(A^c \cap B) = 4$

$n((A \cup B)^c) = n(A^c \cap B^c) = 4$

벤 다이어그램에 각 부분의 원소의 개수를 적어보면 따라서

$n(A - B) = 13 - (6 + 4) = 3$ 이다.

12. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 모두 실수 x 에 대하여 $f(x) \cdot g(x) = 0$ 을 만족시킨다. 두 집합 $A = \{x | f(x) = 0\}$, $B = \{x | g(x) = 0\}$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① A와 B는 모두 무한집합

② A와 B는 모두 유한집합

③ A가 유한집합이면 B는 무한집합

④ A가 무한집합이면 B는 유한집합

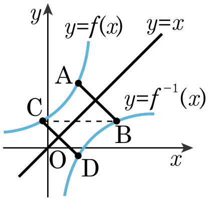
⑤ A가 무한집합이면 B는 무한집합

해설

$f(x) \cdot g(x) = 0 \;\leftrightarrow\; f(x) = 0$ 또는 $g(x) = 0$ 이므로 $A \cup B$ 는 무한집합

$\therefore$ A가 유한집합이면 B는 반드시 무한집합

13. 다음 그림은 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프이다. 점 A의 x좌표가 a일 때, 점 D의 y좌표는?(단, 점선은 x축에 평행하다.)



① $-f^{-1}(a)$ ② $-f(a)$

③ a ④ $f^{-1}(a)$

⑤ $f^{-1}(f^{-1}(a))$

해설

A$(a,\ f(a))$로 놓으면 점 B는
점 A와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 B$(f(a),\ a)$이다.
또, 점 C는 점 B와 y좌표가 같으므로 C$(x,\ a)$로 놓으면 $f(x)=a$이므로
$x=f^{-1}(a)\quad \therefore C(f^{-1}(a),\ a)$
그런데 점 D는 점 C와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로
D$(a,\ f^{-1}(a))$
따라서, 점 D의 y좌표는 $f^{-1}(a)$이다.

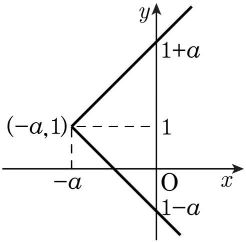
14. $|y-1|=x+a$ 의 그래프와 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 4 일 때, 양수 a 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$|y-1|=x+a$ 의
그래프는 $|y|=x$를
x 축 음의 방향으로 a,
y 축 양의 방향으로 1 만큼 평행이동시킨
그래프이므로 다음 그림과 같다.
이때, y 절편은 $|y-1|=a$ 에서 $y=1\pm a$

$\therefore\ S=\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot a=4$　　$\therefore\ a=2(a>0)$



15. 함수 $y = |x-1| - |x-2|$ 의 그래프와 직선 $y = kx$ 가 세 점에서 만날 때, 상수 k 의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $\frac{1}{2}$　　② $\frac{1}{3}$　　③ $\frac{1}{4}$　　④ $\frac{1}{5}$　　⑤ $\frac{1}{6}$

해설

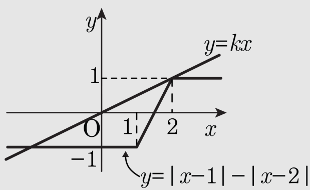
$y = |x-1| - |x-2|$

(i) $x \geq 2$ 일 때, $y = x - 1 - (x-2) = 1$

(ii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $y = x - 1 + x - 2 = 2x - 3$

(iii) $x < 1$ 일 때, $y = -(x-1) + (x-2) = -1$

$y = |x-1| - |x-2|$ 의 그래프는 다음의 그림과 같다.



$y = kx$ 의 그래프는 원점을 지나는 직선이므로 $y = kx$ 의 그래프가 점 $(2,\ 1)$ 을 지날 때

$1 = 2k \quad \therefore k = \frac{1}{2}$

따라서 두 그래프가 세 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는

$0 < k < \frac{1}{2}$ 이다.

그러므로 보기 중 위 범위에 속하지 않는 것은 ① 이다.

16. 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 다음의 조건을 만족시킬 때, $f(2012)$의 값과 같은 것은?

Ⅰ. $f(-x)=f(x)$
Ⅱ. $f(x)=f(10-x)$

① $f(0)$ ② $f(1)$ ③ $f(2)$ ④ $f(3)$ ⑤ $f(4)$

해설

$f(-x)=f(x) \iff y=f(x)$는 y축에 대칭이고,

$f(x)=f(10-x) \iff y=f(x)$는

$x=5$에 대칭이다.

따라서 함수 $y=f(x)$는 주기가 10이고,

$2012=201\times10+2$이므로

$f(2012)=f(201\times10+2)=f(2)$