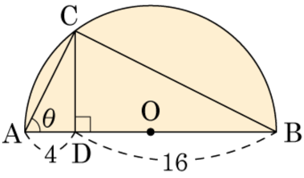
1. 다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 지름으로 하는 반원 위의 점 C 에서 $\overline{\mathrm{AB}}$ 에 내린 수선의 발을 D 라고 하자. $\angle\mathrm{CAD}$ 를 θ 라고 할 때, $\sin\theta$ 의 값이 $\dfrac{a\sqrt{5}}{b}$ 이다. 이때, $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 서로소)



▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$\overline{\mathrm{BC}} = x$ 라 하면, $\triangle\mathrm{ABC}$ 와 $\triangle\mathrm{CDB}$ 는 닮음이다.

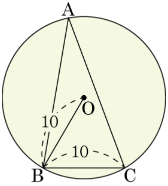
$x : 16 = 20 : x$

$\therefore x = 8\sqrt{5}$

$\angle\mathrm{CAD} = \angle\mathrm{DCB}$ 이므로 $\sin\theta = \dfrac{16}{8\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 이다.

따라서 $a+b=7$ 이다.

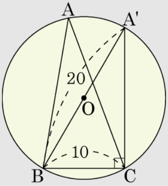
2. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 10 인 원 O 에 내접하는 △ABC 에서 $\overline{\mathrm{BC}} = 10$ 일 때, $\cos A \times \dfrac{1}{\tan A} + \sin A$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

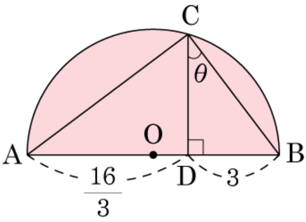


$\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{A}'$

$\overline{\mathrm{A'C}} = \sqrt{20^2 - 10^2} = 10\sqrt{3}$

$\cos A \times \dfrac{1}{\tan A} + \sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} + \dfrac{1}{2} = 2$

3. 다음 그림과 같이 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 반원 O 위의 점 C 에서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 D 라고 하고, $\angle DCB = \theta$, $\overline{AD} = \frac{16}{3}$, $\overline{BD} = 3$ 일 때, $\cos\theta$ 의 값은?



① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{8}$
④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

해설

$\overline{AC} = x$ 라 하면, $\triangle ABC$ 와 $\triangle ACD$ 는 닮음이다.

$$x : \frac{16}{3} = \frac{25}{3} : x$$

$$\therefore x = \frac{20}{3}$$

$\angle DCB = \angle CAB$ 이므로 $\cos\theta = \dfrac{\frac{20}{3}}{\frac{25}{3}} = \frac{4}{5}$ 이다.

4. 삼각형 ABC 의 변 BC 위의 두 점 D, E 에 대하여 $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 3$, $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC} = 2$ 일 때, $\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$ 이므로

$\triangle ABE$ 와 $\triangle ADC$ 에서 각각 중선 정리를 이용하면

(1) $\triangle ABE$ 에서

$\overline{AB^2} + \overline{AE^2} = 2\left(\overline{AD^2} + \overline{BD^2}\right)$

$\therefore\ 2\overline{AD^2} - \overline{AE^2} = 8 \cdots$ ①

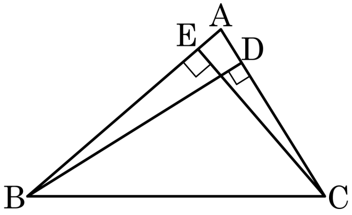
(2) $\triangle ADC$ 에서

$\overline{AD^2} + \overline{AC^2} = 2(\overline{AE^2} + \overline{DE^2})$

$\therefore\ 2\overline{AE^2} - \overline{AD^2} = 1 \cdots$ ②

따라서 ① + ②를 하면 $\overline{AD^2} + \overline{AE^2} = 9$ 이다.

5. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 두 점 D, E 는 꼭짓점 B, C 에서 각각의 대변에 내린 수선의 발이다. $\overline{AB} = 13\,\text{cm}$, $\overline{AC} = 10\,\text{cm}$, $\overline{CD} = 8\,\text{cm}$ 일 때, $\overline{BC}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : $\sqrt{229}$ cm

해설

$\overline{AD} = 10 - 8 = 2(\text{cm})$ 이므로

$\triangle ABD$ 에서

$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 = 13^2 - 2^2 = 165$

$\triangle BCD$ 에서 $\overline{BC} = x(\text{cm})$ 라 하면

$x^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = 165 + 64 = 229$

$x > 0$ 이므로 $x = \sqrt{229}(\text{cm})$

6. $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형 ABC 의 무게중심을 G 라 할 때, $\overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 = 20$ 이다. 이때 선분 AG 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점을 각각 D, E, F 라 하면

$$\begin{aligned}\overline{BG}^2 &= \left(\frac{2}{3}\overline{BF}\right)^2 = \frac{4}{9}\overline{BF}^2 \\ &= \frac{4}{9}\left\{\overline{AB}^2 + \left(\frac{1}{2}\overline{AC}\right)^2\right\} \\ &= \frac{4}{9}\left(\overline{AB}^2 + \frac{1}{4}\overline{AC}^2\right) \cdots ㉠\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{CG}^2 &= \left(\frac{2}{3}\overline{CD}\right)^2 = \frac{4}{9}\overline{CD}^2 \\ &= \frac{4}{9}\left\{\overline{AC}^2 + \left(\frac{1}{2}\overline{AB}\right)^2\right\} \\ &= \frac{4}{9}\left(\overline{AC}^2 + \frac{1}{4}\overline{AB}^2\right) \cdots ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$\overline{BG}^2 + \overline{CG}^2$

$= \frac{4}{9}\left\{\overline{AB}^2 + \frac{1}{4}\overline{AC}^2\right\} + \frac{4}{9}\left(\overline{AC}^2 + \frac{1}{4}\overline{AB}^2\right)$

$= \frac{5}{9}\left(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2\right)$

$= \frac{5}{9}\overline{BC}^2$

$= 20$

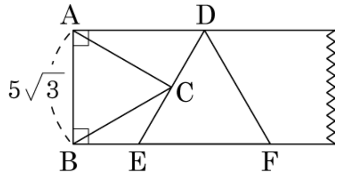
$\therefore\ \overline{BC} = 6$

또 점 E 는 $\triangle ABC$ 의 외심이므로

$\overline{AE} = \overline{BE} = \overline{CE} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 3$ 이다.

따라서 $\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AE} = \frac{2}{3} \times 3 = 2$ 이다.

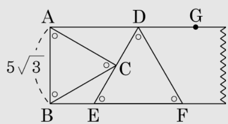
7. 다음 그림과 같이 폭이 $5\sqrt{3}$ 으로 일정한 종이테이프 내부에 두 개의 정삼각형 ABC, DEF 가 맞닿아 있다. 이 때, $\overline{AD}$ 의 길이를 구하여라.



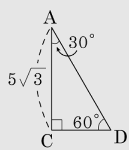
▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

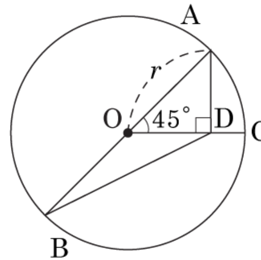


다음 그림에서 $\angle CAD = 90° - 60° = 30°$, $\overline{AG} // \overline{BF}$ 이므로 $\angle ADC = \angle CEF = 60°$ 이다.



$\triangle ACD$ 에서 $\overline{AD} : \overline{CD} : \overline{AC} = 2 : 1 : \sqrt{3}$ 이므로 $\overline{AD} : 5\sqrt{3} = 2 : \sqrt{3}$, $\therefore \overline{AD} = 10$

8. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 r 인 원 O 에서 $\angle AOC = 45°$, $\overline{OC} \perp \overline{AD}$ 일 때, $\overline{BD}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{\sqrt{10}}{2}r$

해설

$\overline{AD}$ 의 연장선을 그어서 원과 만나는 점을 E 라고 하면 반원의 원주각은 $90°$ 이므로 $\angle AEB = 90°$

$\overline{OD} = \overline{AD} = \overline{DE} = x$ 라 하면

$x^2 + x^2 = r^2$ 이므로

$x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}r$, $\overline{AE} = \overline{BE} = \sqrt{2}r$

$\triangle DBE$ 가 직각삼각형이므로

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2 + (\sqrt{2}r)^2 = \overline{BD}^2$$

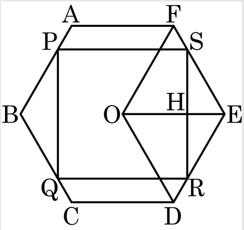
$$\therefore\ \overline{BD} = \frac{\sqrt{10}}{2}r$$

9. 한 변의 길이가 $\sqrt{3}+3$ 인 정육각형에 내접한 정사각형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

해설



위의 그림과 같이 정육각형의 대각선의 교점 O 에서 정사각형의 변 RS 에 내린 수선의 발을 H 라 하고, 정사각형의 한 변의 길이를 x 라 하면,

$\overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{HR}} = \dfrac{x}{2}$, $\overline{\mathrm{HE}} = \overline{\mathrm{OE}} - \dfrac{x}{2}$

또 정육각형의 한 내각의 크기는 $120°$ 이므로

$\triangle\mathrm{HRE}$ 의 세 내각의 크기는 $30°,\ 60°,\ 90°$ 이다.

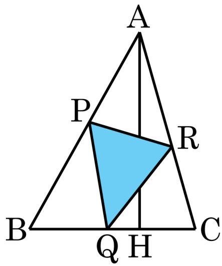
$\overline{\mathrm{HR}} : \overline{\mathrm{HE}} = \sqrt{3} : 1$ 에서

$\overline{\mathrm{HR}} = \sqrt{3}\overline{\mathrm{HE}} = \sqrt{3}\left(\overline{\mathrm{OE}} - \dfrac{\mathrm{x}}{2}\right)$

$\therefore\ x = (3-\sqrt{3})\overline{\mathrm{OE}} = (3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3}) = 6$

따라서 정사각형의 넓이는 36 이다.

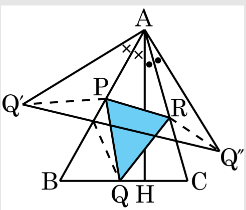
10. 다음과 같이 $\angle A = 45°$ 인 예각삼각형 ABC 의 점 A 에서 변 BC 에 내린 수선의 발 H 에 대하여 $\overline{AH} = 4$ 일 때, 삼각형 ABC 에 내접하는 삼각형 PQR 의 둘레의 길이의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $4\sqrt{2}$

해설



위의 그림과 같이 점 Q 의 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 에 대한 대칭점을 각각 Q′, Q″ 라 하면

$\overline{PQ} = \overline{PQ'}$, $\overline{RQ} = \overline{RQ''}$

$\angle Q'AQ'' = 2(\bullet + \times) = 90°$ 이고,

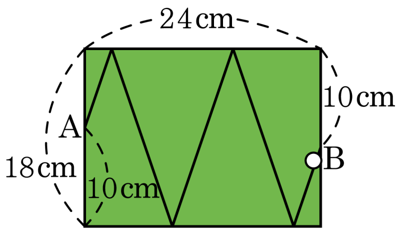
$\triangle PQR$ 의 둘레의 길이는

$\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP} = \overline{PQ'} + \overline{Q''R} + \overline{RP} \geq \overline{Q'Q''}$

그런데 $\overline{AQ'} = \overline{AQ''} = \overline{AQ}$ 이므로 $\overline{AQ}$ 가 최소일 때, 즉 $\overline{AQ}$ 가 점 A 에서 변 BC 에 내린 수선일 때, $\overline{Q'Q''}$ 가 최소가 된다.

이때, $\overline{AQ} = \overline{AH} = 4$ 이므로 $\triangle PQR$ 의 둘레의 길이의 최솟값은 $\overline{Q'Q''} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ 이다.

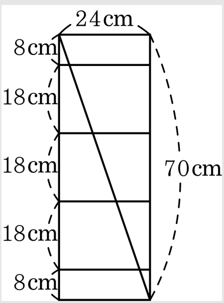
11. 다음 그림과 같은 직사각형 모양의 미니당구대에서 공을 너무 세게 치는 바람에 흰 공이 A 에서 출발하여 벽을 차례로 거쳐 점 B 에 도착하였다. 공이 지나갈 수 있는 최단 거리를 구하여라.



▶ 답 : cm

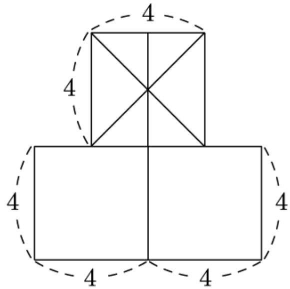
▷ 정답 : 74 cm

해설



$$(\text{공이 지나간 최단 거리}) = \sqrt{24^2 + 70^2}$$
$$= \sqrt{5476} = 74(\text{cm})$$

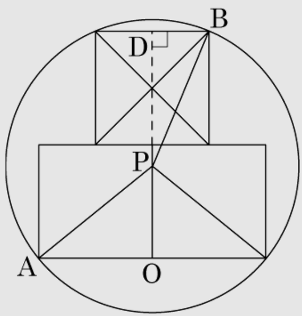
12. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 3개를 포함할 수 있는 원 중 최소인 것의 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{5\sqrt{17}}{4}$

해설



그림에서 O 를 밑변의 중점, P 를 최소인 원의 중심, r 를 반지름이라고 하자. 원은 두 점 A, B 를 지나므로 P 는 대칭축 $\overline{\mathrm{OD}}$ 위에 있어야 한다. $\therefore\ r=\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$

직각삼각형 PDB 에서$\overline{\mathrm{PB}^2}=(8-\overline{\mathrm{OP}})^2+2^2\cdots$㉠,

직각삼각형 POA 에서$\overline{\mathrm{PA}^2}=\overline{\mathrm{OP}^2}+4^2\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2=r^2$ 이므로 $4+64-16\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{OP}^2}=\overline{\mathrm{OP}^2}+16,\ 16\times\overline{\mathrm{OP}}=52,\ \therefore\ \overline{\mathrm{OP}}=\dfrac{13}{4}$

따라서 $r^2=4^2+\overline{\mathrm{OP}^2}=\dfrac{425}{16},\quad \therefore\ r=\dfrac{5\sqrt{17}}{4}$ 이다.