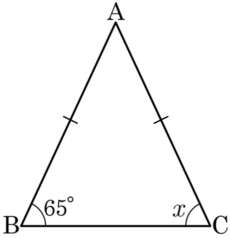
1. 다음 그림과 같은 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 일 때, $\angle x$ 의 크기는?



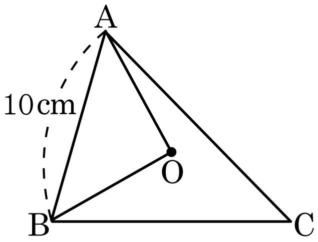
① $45\,°$ ② $55\,°$ ③ $65\,°$ ④ $75\,°$ ⑤ $85\,°$

해설

$\triangle ABC$ 가 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이므로

$\angle x = \angle ABC = 65\,°$

2. 다음 그림에서 점 O는 $\triangle ABC$의 외심이다. $\overline{AB} = 10\,\text{cm}$이고, $\triangle AOB$의 둘레의 길이가 $24\,\text{cm}$일 때, $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이는?



① 3cm ② 4cm ③ 5cm ④ 6cm ⑤ 7cm

해설

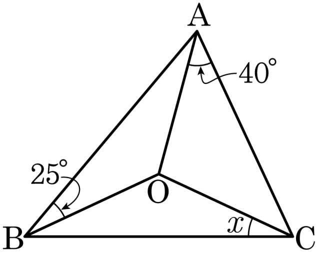
점 O가 $\triangle ABC$의 외심이므로 $\overline{OA} = \overline{OB}$

따라서 $\triangle AOB$의 둘레의 길이는

$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{AB} = 2\overline{OA} + 10 = 24$

$\therefore \mathrm{OA} = 7(\,\mathrm{cm})$

3. 다음 그림에서 점 O는 $\triangle ABC$의 외심이다. $\angle CAO = 40°$, $\angle ABO = 25°$일 때, $\angle BCO$의 크기는?



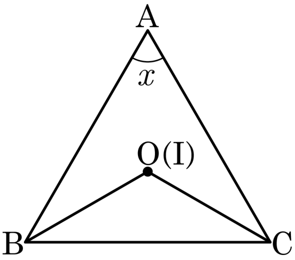
① 22° ② 35° ③ 20° ④ 30° ⑤ 25°

해설

$\angle ABO + \angle OAC + \angle x = 90°$

$\therefore \angle x = 25°$

4. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 외심 O 와 내심 I 가 일치할 때, $\angle x$ 의 크기를 구하여라.



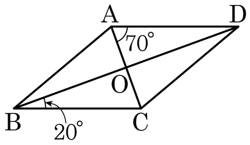
▶ 답 : °

▷ 정답 : 60 °

해설

$\triangle ABC$ 의 외심과 내심이 일치할 때는 $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다.
따라서 $x = 60°$ 이다.

5. 다음 그림의 평행사변형 ABCD 에서 $\angle DAC = 70°$, $\angle DBC = 20°$ 일 때, $\angle BDC$ 의 크기는?



① $10°$　② $20°$　③ $30°$　④ $40°$　⑤ $50°$

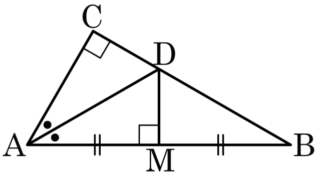
해설

$\angle ADO = 20°(\because$ 엇각$)$

따라서 $\angle AOD$ 는 직각이고 두 대각선이 직교하는 것은 마름모이다.

$\therefore \angle BDC = 20°$

6. 다음 그림과 같이 $\angle C = 90°$ 인 직각삼각형 ABC 에서 $\overline{AB}$ 의 수직이등분선과 $\overline{BC}$ 와의 교점을 D 라 한다. $\overline{AD}$ 가 $\angle A$ 의 이등분선일 때, $\angle B$ 의 크기는?

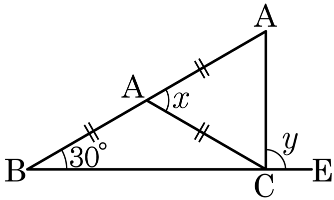


① 26°　② 28°　③ 30°　④ 32°　⑤ 34°

해설

$\triangle AMD$ 와 $\triangle BMD$ 에서 $\angle AMD = \angle BMD = 90° \cdots$ ㉠
$\overline{MD}$ 는 공통$\cdots$ ㉡
$\overline{AM} = \overline{BM} \cdots$ ㉢
㉠,㉡,㉢에 의해 $\triangle AMD \equiv \triangle BMD$(SAS합동)
$\therefore \angle DAM = \angle B \cdots$ ㉣
$\overline{AD}$ 가 A 의 이등분선이므로 $\angle DAM = \angle DAC \cdots$ ㉤
㉣,㉤에 의해 $\angle DAM = \angle B = \angle DAC$
$\angle DAM + \angle B + \angle DAC = 90°$ 이므로 $3\angle B = 90°$ $\therefore \angle B = 30°$

7. 다음 그림에서 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD}$, $\angle ABC = 30°$ 일 때, $\angle x + \angle y$ 의 크기를 구하여라.



① 150° ② 160° ③ 170° ④ 180° ⑤ 190°

해설

$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD}$ 이므로 빗변의 중점인 점 A 는 직각삼각형의 외심이다.

$\overline{AB} = \overline{AC}$ 이므로 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형

$\therefore \angle ACB = \angle ABC = 30°$

삼각형의 외각의 성질에 의해 $\angle DAC = \angle ACB + \angle ABC = 30° + 30° = 60°$

$\therefore \angle x = 60° \cdots$ ㉠

$\overline{CA} = \overline{AD}$ 이므로

$\triangle ACD$ 는 이등변삼각형

$\therefore \angle ACD = \angle CDA = 60°$ ($\because$ ㉠)

세 내각의 크기가 같으므로 삼각형 ACD 는 정삼각형이다.

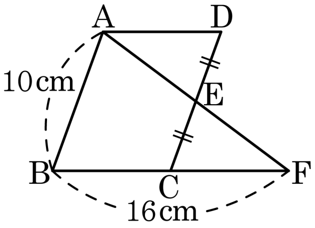
$\angle DCB = \angle ACD + \angle ACB = 60° + 30° = 90°$

$\angle DCE = 90°$ 이다.

$\therefore \angle y = 90° \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의해서 $\angle x + \angle y = 60° + 90° = 150°$

8. 오른쪽 그림과 같은 평행사변형 ABCD 에서 $\overline{CD}$ 의 중점을 E , $\overline{AE}$ 의 연장선과 $\overline{BC}$ 의 연장선의 교점을 F 라 할 때, $\overline{AD}$ 의 길이를 구하여라.

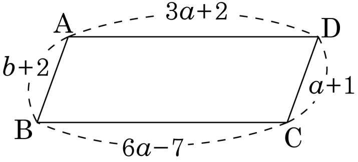


① 4 cm ② 5 cm ③ 6 cm ④ 9 cm ⑤ 8 cm

해설

$\triangle$AED 와 $\triangle$FEC 에서
$\overline{DE} = \overline{CE}$, $\angle ADE = \angle FCE$ (엇각),
$\angle AED = \angle FEC$ (맞꼭지각) 이므로
$\triangle AED \equiv \triangle FEC$(ASA합동)
따라서 $\overline{AD} = \overline{FC}$ 이고, □ABCD 가 평행사변형이므로 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 이다.
즉, $\overline{BF} = \overline{BC} + \overline{CF} = \overline{AD} + \overline{AD} = 2\overline{AD}$ 이므로 $2\overline{AD} = 16$
$\therefore \overline{AD} = 8(\text{cm})$

9. 다음과 같은 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 하는 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

평행사변형이 되려면

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BC}}$이어야 하므로

$3a+2=6a-7$

$3a=9$

$\therefore\ a=3$

또한, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{DC}}$이어야 하므로

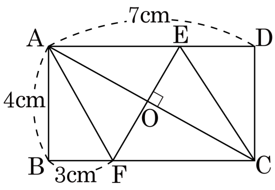
$b+2=a+1$

$b+2=4$

$\therefore\ b=2$

$\therefore\ a+b=5$

10. 직사각형 ABCD의 대각선 AC의 수직이등분선이 두 변 AD, BC와 만나는 점을 E, F라 할 때, □AFCE의 둘레의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ____ cm

▷ 정답 : 16 cm

해설

△OEA와 △OFC에서

$\overline{OA} = \overline{OC}$

$\angle EAO = \angle FCO$(엇각)

$\angle AOE = \angle COF$(맞꼭지각)

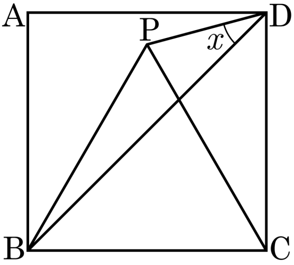
따라서 △OEA ≡ △OFC (ASA 합동)이므로 $\overline{OE} = \overline{OF}$

□AFCE는 두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분하므로 마름모이다.

또한, $\overline{AE} = \overline{FC} = \overline{BC} - \overline{BF} = 7 - 3 = 4(\text{cm})$이므로

□AFCE의 둘레의 길이는 $4 \times 4 = 16(\text{cm})$

11. 다음 그림에서 □ABCD 는 정사각형이고, △PBC 는 정삼각형일 때, $\angle x = (\quad)°$ 이다. ( ) 안에 들어갈 알맞은 수를 구하여라.



① 10° ② 15° ③ 20° ④ 25° ⑤ 30°

해설

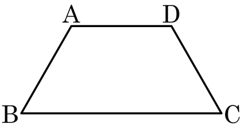
$\angle CDB = 45°$,

$\angle PCD = 30°$ 이고 $\overline{PC} = \overline{DC}$ 이므로

$\angle CDP = 75°$,

$\therefore \angle x = 75° - 45° = 30°$

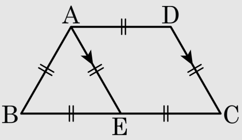
12. 다음 그림은 $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$ 인 등변사다리꼴이다. $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{CD}$ 이고, $\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 일 때, $\angle B$ 의 크기를 구하여라.



▶ 답 : $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad °}$

▷ 정답 : $\underline{60°}$

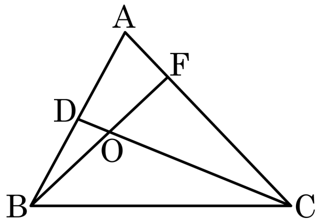
해설



$\overline{DC}$ 에 평행하게 $\overline{AE}$ 를 그으면 $\square AECD$ 는 평행사변형이 되고, $\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 이므로 점 E 는 $\overline{BC}$ 의 중점에 위치하게 된다. 그러므로 $\overline{AB} = \overline{BE} = \overline{AE}$ 이므로 $\triangle ABE$ 는 정삼각형이 된다.

$\therefore \angle B = 60°$

13. 다음 그림과 같은 $\triangle ABC$에서 $\overline{AD} : \overline{DB} = 1 : 1$, $\overline{DO} : \overline{OC} = 1 : 6$, $\overline{AF} : \overline{FC} = 1 : 3$이다. $\triangle ABC$의 넓이가 560일 때, $\triangle COF$의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 180

해설

$\triangle CAD : \triangle CBD = 1 : 1$이므로

$\triangle CAD = \frac{1}{2}\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 560 = 280$

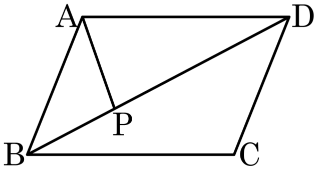
$\overline{AO}$를 그으면 $\triangle ADO : \triangle ACO = 1 : 6$ 이므로

$\triangle ACO = \frac{6}{7}\triangle CAD = \frac{6}{7} \times 280 = 240$

또, $\triangle AOF : \triangle COF = 1 : 3$이므로

$\triangle COF = \frac{3}{4}\triangle ACO = \frac{3}{4} \times 240 = 180$

14. 다음 그림과 같은 평행사변형 ABCD 에서 $\overline{BP} : \overline{DP} = 1 : 2$ 이다. $\square ABCD = 24cm^2$ 일 때, $\triangle APD$ 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 : $\underline{\quad\quad cm^2}$

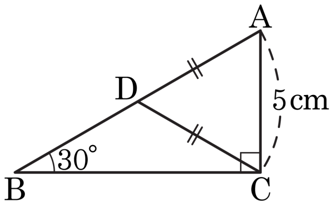
▷ 정답 : 8 $\underline{cm^2}$

해설

$\triangle ABD = \dfrac{24}{2} = 12(cm^2)$

$\triangle ABP$, $\triangle APD$ 는 높이가 같고, $\triangle ABP : \triangle APD = 1 : 2$ 이다.
따라서 $\triangle APD = 8cm^2$ 이다.

15. 다음 그림과 같이 $\angle C = 90°$ 인 직각삼각형 ABC 에서 $\overline{AD} = \overline{CD}$ 일 때, $\overline{AB}$ 의 길이는?



① 7cm ② 8cm ③ 9cm ④ 10cm ⑤ 11cm

해설

$\triangle ABC$ 에서

$\angle BAC = 180° - (90° + 30°) = 60°$

$\triangle ACD$ 는 이등변삼각형이므로 $\angle DAC = \angle DCA$

그런데 $\angle DAC = \angle BAC$ 이므로 $\angle DAC = \angle DCA = 60°$

또 $\angle CDA = 60°$ 이므로 $\triangle ACD$ 는 정삼각형

$\angle C = 90°$ 이고 $\angle DCA = 60°$ 이므로

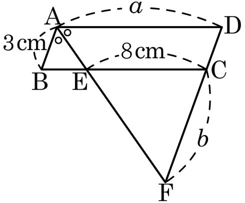
$\angle BCD = 90° - 60° = 30°$

따라서 $\triangle BCD$ 는 이등변삼각형

$\overline{AD} = \overline{CD} = \overline{BD}$ 이므로

$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BD} = 5 + 5 = 10(\text{cm})$

16. 다음 그림의 평행사변형 ABCD 에서 $a+b$ 의 값은?



① 19cm ② 20cm ③ 21cm

④ 22cm ⑤ 23cm

해설

$\angle \mathrm{DAF} = \angle \mathrm{CEF}$ ($\because$ 동위각)

$\angle \mathrm{BAE} = \angle \mathrm{CFE}$ ($\because$ 엇각)

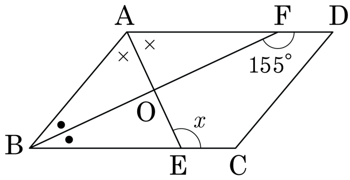
$\triangle \mathrm{CEF}$ 는 이등변삼각형이 되어 $\overline{\mathrm{CE}} = \overline{\mathrm{CF}},\ b = 8\mathrm{cm}$

$\triangle \mathrm{DAF}$ 도 이등변삼각형이 되고, $\square \mathrm{ABCD}$ 에서 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{DC}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{DF}} = a = b + \overline{\mathrm{DC}} = 8 + 3 = 11\mathrm{cm}$

$\therefore\ a + b = 11 + 8 = 19(\mathrm{cm})$

17. 다음 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 $\angle A$, $\angle B$의 이등분선의 교점을 O라 하자 $\angle BFD = 155°$일 때, $\angle x$의 크기를 구하여라.



▶ **답 :** ______ °

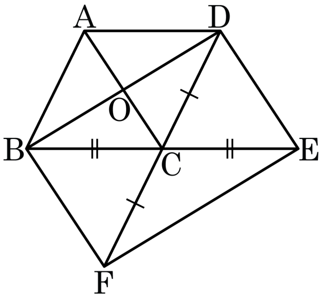
▷ **정답 :** 115 °

해설

$\overline{AE}$에 의하여 이등분되는
$\angle A$를 $\angle DAE = \angle BAE = a$라 하고
$\overline{BF}$에 의하여 이등분되는
$\angle B$를 $\angle ABF = \angle EBF = b$라 하면
평행사변형에서 이웃하는 각의 크기의 합이 $180°$이므로
$2a + 2b = 180°$
$a + b = 90°$

$\angle AFB = 180° - 155° = 25°$이고 $\overline{AD} // \overline{BC}$이므로 엇각의 성질에 의하여 $b = 25°$
$a + b = 90°$이므로 $a + 25° = 90°$
$\therefore\ a = 65°$
$\triangle ABE$에서 두 내각의 합은 이웃하지 않은 외각의 크기와 같으므로 $a + 2b = \angle x$
$\therefore\ \angle x = 65° + 50° = 115°$

18. 평행사변형 ABCD 의 두 변 BC, DC 의 연장선 위에 $\overline{BC} = \overline{CE}$, $\overline{DC} = \overline{CF}$ 가 되도록 두 점 E, F 를 잡을 때, □ABCD를 제외한 사각형이 평행사변형이 되는 조건은 보기에서 모두 몇 개인가?



보기

㉠ 두 쌍의 대변이 각각 평행하다.

㉡ 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.

㉢ 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.

㉣ 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.

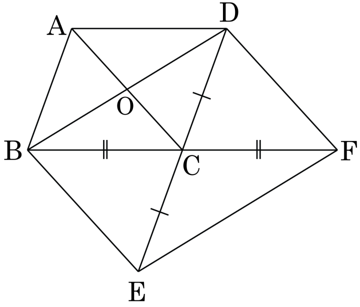
㉤ 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같다.

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

평행사변형이 되는 조건은 □ABFC, □ACED가 평행사변형이되는 조건 ㉤과 □BFED가 평행사변형이 되는 조건 ㉣로 2개이다.

19. □ABCD 는 평행사변형이고 $\overline{BC} = \overline{CF}$, $\overline{DC} = \overline{CE}$ 이다. △AOD 의 넓이가 $5\,cm^2$ 일 때, □BEFD 의 넓이를 구하여라.



▶ **답 :** cm^2

▷ **정답 :** $40\,cm^2$

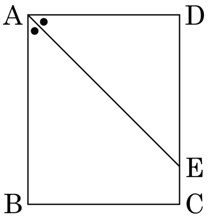
해설

$\triangle AOD = \dfrac{1}{4} \times \square ABCD$ 이므로

$\triangle BCD = 2 \times \triangle AOD = 2 \times 5 = 10(cm^2)$

$$\begin{aligned}\square BEFD &= 4 \times \triangle BCD \\ &= 4 \times 10 \\ &= 40(cm^2)\end{aligned}$$

20. 다음과 같은 직사각형에서 $\overline{AE}$는 $\angle A$의 이등분선이다. $\overline{AB}$: $\overline{AD}$ = 5 : 4일 때, $\triangle AED$: $\square ABCE$를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 2 : 3

해설

$\overline{AB}//\overline{DC}$이므로 $\angle EAB = \angle AED$
따라서 $\triangle AED$는 이등변삼각형이다.

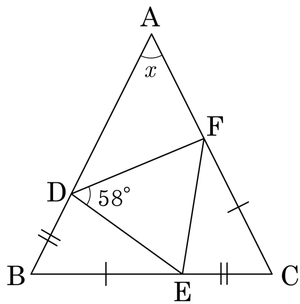
$\overline{AB} : \overline{AD} = 5 : 4$에서 $\overline{AB} = 5x$, $\overline{AD} = 4x$라하면
$\overline{DE} = 4x$, $\overline{EC} = x$

$\triangle AED = \dfrac{1}{2} \times 4x \times 4x = 8x^2$

$\square ABCE = (5x + x) \times 4x \times \dfrac{1}{2} = 12x^2$

$\therefore\ \triangle AED : \square ABCE = 8x^2 : 12x^2 = 2 : 3$

21. $\overline{AB} = \overline{AC}$인 $\triangle ABC$에서 $\overline{BD} = \overline{EC}$, $\overline{BE} = \overline{FC}$이다. $\angle EDF$의 크기가 $58°$일 때, $\angle x$의 크기를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $52°$

해설

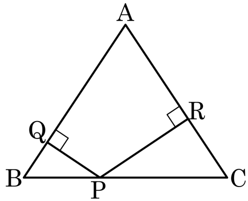
$\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형이므로
$\angle ABC = \angle ACB$, 또한 $\overline{BD} = \overline{EC}$, $\overline{BE} = \overline{FC}$
$\therefore$ $\triangle BDE \equiv \triangle CEF$(SAS 합동)
$\therefore$ $\overline{DE} = \overline{EF}$

$\triangle EDF$가 이등변삼각형이므로
$\angle DEF = 180° - 58° \times 2 = 64°$
$\angle BED = a$, $\angle CEF = b$라 하면
$a + b = 180° - 64° = 116°$
그런데 $\angle BDE = b$, $\angle EFC = a$이므로

$$\begin{aligned}\angle ABC &= 180° - (a + b)\\ &= 180° - 116°\\ &= 64° = \angle ACB\end{aligned}$$

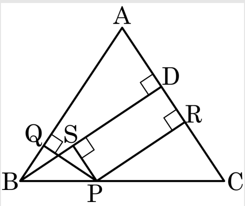
$\therefore$ $\angle x = 180° - (64° + 64°) = 52°$

22. 다음 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 인 $\triangle ABC$ 에서 밑변 BC 위의 한 점 P 에서 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라 한다. $\overline{PQ}=3\text{cm}$, $\overline{PR}=5\text{cm}$ 일 때, 점 B 에서 $\overline{AC}$ 에 이르는 거리는?



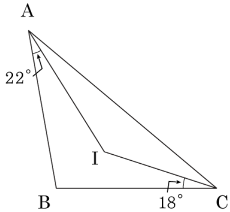
① 5cm ② 7cm ③ 8cm ④ 10cm ⑤ 12cm

해설



B 에서 $\overline{AC}$ 에 내린 수선의 발을 D
P 에서 $\overline{BD}$ 에 내린 수선의 발을 S 라 하면
$\angle BQP=\angle BSP \cdots$ ㉠
$\overline{BP}$ 는 공통이다. $\cdots$ ㉡
$\angle BPS=\angle C$
$\therefore \angle QBP=\angle SPB \cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢ 에 의하여
$\triangle QBP \equiv \triangle SPB$ (RHA 합동)
$\therefore\ \overline{QP}=\overline{SB}\ \cdots$ ㉣
또, □SPRD 는 직사각형이므로
$\overline{PR}=\overline{SD}\ \cdots$ ㉤
㉣, ㉤ 에서 $\overline{QP}+\overline{PR}=\overline{BS}+\overline{SD}=\overline{BD}$
$\therefore\ \overline{BD}=3+5=8(\text{cm})$

23. 다음 $\triangle ABC$에서 점 I는 삼각형의 내심이다. $\angle BAI = 22°, \angle BCI = 18°$일 때,
$\angle AIC : \angle ABC$를 간단한 정수비로 나타내어라.



▶ 답 :

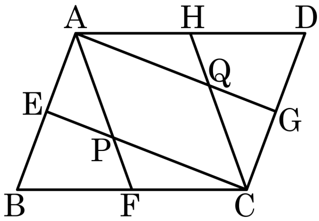
▷ 정답 : $7 : 5$

해설

점 I가 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이므로
$\angle BAI = \angle CAI = 22°$, $\angle BCI = \angle ACI = 18°$이다.
삼각형의 내각의 합은 $180°$이므로 $\angle AIC = 180° - 22° - 18° = 140°$이다.

또, 점 I 가 삼각형의 내심일 때, $\angle AIC = 140° = 90° + \frac{1}{2}\angle ABC$이므로
$\angle ABC = 100°$이다.
$\therefore \angle AIC : \angle ABC = 140 : 100 = 14 : 10 = 7 : 5$

24. 다음은 평행사변형 ABCD의 각 변의 중점을 각각 E, F, G, H라 하고 $\overline{AF}$와 $\overline{CE}$의 교점을 P, $\overline{AG}$와 $\overline{CH}$의 교점을 Q라 할 때, □APCQ는 평행사변형임을 증명하는 과정이다. ㄱ, ㄴ에 알맞은 것을 써 넣으면?



□AFCH에서
$\overline{AH} // \overline{FC}$, $\overline{AH} = \overline{FC}$이므로
□AFCH는 평행사변형
$\overline{AF} // \overline{HC}$
[ㄱ] ⋯ ㉠
□AECG에서
$\overline{AE} // \overline{GC}$, $\overline{AE} = \overline{GC}$이므로
□AECG는 평행사변형
$\overline{AG} // \overline{EC}$
즉, [ㄴ] ⋯ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 □APCQ는 평행사변형이다.

① ㄱ : $\overline{AB} // \overline{DC}$, ㄴ : $\overline{AQ} = \overline{PC}$

② ㄱ : $\overline{AP} = \overline{QC}$, ㄴ : $\overline{AQ} = \overline{PC}$

③ ㄱ : $\overline{AE} = \overline{EB}$, ㄴ : $\overline{AD} // \overline{CB}$

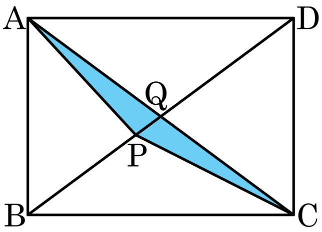
④ ㄱ : $\overline{AP} // \overline{QC}$, ㄴ : $\overline{AQ} // \overline{PC}$

⑤ ㄱ : $\overline{AF} = \overline{CH}$, ㄴ : $\overline{AH} // \overline{FC}$

해설

$\overline{AF} // \overline{HC}$ 이므로 $\overline{AP} // \overline{QC}$ 이고, $\overline{AG} // \overline{EC}$ 이므로 $\overline{AQ} // \overline{PC}$ 이다.

25. 다음 그림과 같이 직사각형 ABCD 의 내부에 점 P 가 있다. 대각선 AC 를 긋고 점 P 에서 각 꼭짓점을 연결하면 $\triangle PCD$, $\triangle BCP$ 의 넓이는 각각 10cm^2, 6cm^2 가 된다. 이 때, $\triangle PAC$ 의 넓이를 구하여라.



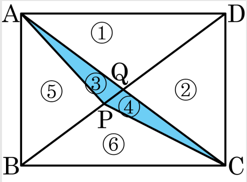
▶ 답: ______ cm^2

▷ 정답: 4 cm^2

해설

$\frac{1}{2}\square ABCD = \triangle ACD = \triangle APD + \triangle BPC$ 이므로

각각의 넓이를 다음과 같이 나타낼 때,



① + ② = ① + ③ + ⑥ 에서

② = ③ + ⑥ 이다.

② = $\triangle DPC$ − ④ 라 하면

$\triangle DPC$ − ④ = ③ + ⑥ 이므로

③ + ④ = $\triangle DPC$ − ⑥ $= 10 - 6 = 4\ (\text{cm}^2)$