

1. 다항식 $x^3 + ax - 8$ 을 $x^2 + 4x + b$ 로 나눌 때, 나머지가 $3x + 4$ 가 되도록 상수 $a + b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$x^3 + ax - 8$ 을 $x^2 + 4x + b$ 로 직접나눈 나머지는

$$(a - b + 16)x + 4b - 8$$

$$(a - b + 16)x + 4b - 8 = 3x + 4 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

⑦이 x 에 대한 항등식이므로,

$$a - b + 16 = 3, 4b - 8 = 4$$

$$\therefore a = -10, b = 3$$

$$\therefore a + b = -7$$

해설

$x^3 + ax - 8 = (x^2 + 4x + b)(x + p) + 3x + 4$ 의 양변의 계수를 비교하여 $a = -10, b = 3, p = -4$ 를 구해도 된다.

2. x 에 대한 다항식 $4x^3 - 3x^2 + ax + b$ 가 $(x+1)(x-3)$ 을 인수로 갖도록 $a + b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -37

해설

$P(x) = 4x^3 - 3x^2 + ax + b$ 라 하고 $P(x)$ 가 $(x+1)(x-3)$ 을 인수로 가지려면

$$P(-1) = P(3) = 0$$

$$P(-1) = -4 - 3 - a + b = 0 \quad \therefore a - b = -7$$

$$P(3) = 108 - 27 + 3a + b = 0 \quad \therefore 3a + b = -81$$

$$\therefore a = -22, b = -15$$

3. 좌표평면에서 원 $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 31 = 0$ 을 평행이동하여 원 $x^2 + y^2 = c$ 를 얻었다. 이 때, 상수 c 의 값은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 16

해설

$x^2 + y^2 - 8x + 10y + 31 = 0$ 을 변형하면

$$(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 10$$

이 원이 평행이동하여 $x^2 + y^2 = c$ 가 되려면 $c = 10$

4. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 w 라고 할 때, $\frac{w^{102} + w^{101}}{w^{100}} + \frac{w^{99}}{w^{101} + w^{100}}$ 을 계산하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x^3 = 1 \Rightarrow \omega^3 = 1$$

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^2 + \omega = -1$$

$$\frac{\omega^{102} + \omega^{101}}{\omega^{100}} + \frac{\omega^{99}}{\omega^{101} + \omega^{100}}$$

$$= \frac{\omega^2 + \omega}{1} + \frac{1}{\omega^2 + \omega}$$

$$= -1 - 1 = -2$$

5. 연립부등식 $\begin{cases} \frac{2x+1}{3} < \frac{-x-6}{4} \\ 2(3-x)+8 \geq 5x-7 \end{cases}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x < -2$

해설

(i) $\frac{2x+1}{3} < \frac{-x-6}{4}$ 에서 $x < -2$

(ii) $2(3-x)+8 \geq 5x-7$ 에서 $x \leq 3$

$\therefore x < -2$

6. 연립부등식 $x < -\frac{3x-a}{4} < \frac{1}{2}$ 의 해가 $-\frac{1}{3} < x < b$ 일 때, $14ab$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$(i) \ x < -\frac{3x-a}{4}, -4x > 3x-a$$

$$\therefore x < \frac{a}{7}$$

$$(ii) \ -\frac{3x-a}{4} < \frac{1}{2}, 3x > a-2, x > \frac{a-2}{3}$$

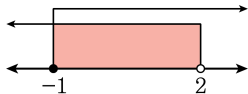
$$\therefore \frac{a-2}{3} < x < \frac{a}{7}$$

$$\frac{a-2}{3} = -\frac{1}{3} \text{ 이므로 } a = 1, b = \frac{1}{7}$$

$$\therefore 14ab = 14 \times 1 \times \frac{1}{7} = 2$$

7. 연립부등식

$$\begin{cases} 3x > 5x - 4 \\ 3x + a \geq 2x \end{cases}$$



의 해가 다음과 같을 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

해는 $-1 \leq x < 2$ 이다.

$$\begin{cases} 3x > 5x - 4 \\ 3x + a \geq 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq -a \end{cases}$$

$$-a = -1 \quad \therefore a = 1$$

8. 부등식 $|4x - 2| < 6$ 의 해와 부등식 $ax^2 + 2x + b > 0$ 의 해가 서로 같을 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① -2

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 4

해설

$$|4x - 2| < 6, -6 < 4x - 2 < 6$$

$$\therefore -1 < x < 2$$

$$(x + 1)(x - 2) < 0 \Leftrightarrow ax^2 + 2x + b > 0$$

$$x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{a}x + \frac{b}{a} < 0$$

$$\frac{2}{a} = -1, \frac{b}{a} = -2$$

$$a = -2, b = 4$$

$$\therefore a + b = -2 + 4 = 2$$

9. 중심이 직선 $y = x + 3$ 위에 있고 점 $(6, 2)$ 를 지나며, x 축에 접하는 원의 반지름 중 가장 작은 것은?

① 2

② 5

③ 7

④ 14

⑤ 17

해설

원의 중심을 $(a, a + 3)$ 으로 놓으면 원의 방정식은

$$(x - a)^2 + (y - a - 3)^2 = (a + 3)^2$$

이 원이 $(6, 2)$ 를 지나므로

$$(6 - a)^2 + (a + 1)^2 = (a + 3)^2 \text{ 에서}$$

$$(a - 2)(a - 14) = 0$$

$$\therefore a = 2, 14$$

원의 반지름중 작은 것은 $a + 3 = 2 + 3 = 5$

10. x, y, z 가 삼각형의 세 변의 길이이고, $xz^2 - yz^2 + yx^2 + zx^2 - zy^2 - xy^2 = 0$ 을 만족할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① z 가 빗변인 직각삼각형

② x 가 빗변인 직각삼각형

③ $x = y$ 인 이등변삼각형

④ $y = z$ 인 이등변삼각형

⑤ $z = x$ 인 이등변삼각형

해설

$$xz^2 - yz^2 + yx^2 + zx^2 - zy^2 - xy^2 = 0$$

$$(x - y)z^2 + (x^2 - y^2)z + (x - y)xy = 0$$

$$(x - y)\{z^2 + (x + y)z + xy\} = 0$$

$$(x - y)(z + x)(z + y) = 0. \therefore x = y \quad (\because x, y, z \text{는 모두 양수})$$

$\therefore x = y$ 인 이등변삼각형

11. 사차방정식 $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ 을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ 의 양변을
 x^2 으로 나누면

$$x^2 + x + 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$ 로 치환하면

$$t^2 + t = 0, t(t+1) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = -1$$

$$(i) \ x + \frac{1}{x} = 0 \text{ 일 때, } x^2 + 1 = 0$$

$$\therefore x = \pm i$$

$$(ii) \ x + \frac{1}{x} = -1 \text{ 일 때,}$$

$$x^2 + 1 = -x, x^2 + x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$$x = \pm i \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore (-i) + i + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -1$$

12. x, y 에 관한 연립방정식

$$\begin{cases} kx + (1-k)y = 2k + 1 \\ akx + (k+1)y = b + 4k \end{cases} \quad \text{가 } k \text{의 값에 관계없이 일정한 근을 갖도}$$

록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$kx + (1-k)y = 2k + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$akx + (k+1)y = b + 4k \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } (x-y-2)k + (y-1) = 0$$

$$\Rightarrow x-y-2=0, y-1=0$$

$$\therefore x=3, y=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$$(3a-3)k + (1-b) = 0$$

$$\therefore a=1, b=1$$

$$\therefore a+b=2$$

13. 연립부등식 $\begin{cases} 5x + 7 \leq 2x - 2 \\ 2ax - 2b \geq bx + 4a \end{cases}$ 의 해가 $x \leq -3$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하면?

- ① 3 ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{3}{14}$ ④ $\frac{1}{10}$ ⑤ 5

해설

$$5x + 7 \leq 2x - 2, 3x \leq -9, x \leq -3 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$2ax - 2b \geq bx + 4a, (2a - b)x \geq 4a + 2b \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통되는 부분이 $x \leq -3$ 이 되기 위해서는 ㉡에서 $2a - b < 0$ 이다.

이때, $x \leq \frac{4a + 2b}{2a - b}$ 이면서 $\frac{4a + 2b}{2a - b} = -3$ 이어야 한다.

$$4a + 2b = -6a + 3b, 10a = b$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{1}{10}$$

14. x, y 가 실수일 때, $\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}$ 의 최솟값은?

① $\sqrt{5}$

② $2\sqrt{5}$

③ $\sqrt{6}$

④ $2\sqrt{6}$

⑤ 5

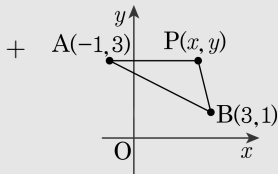
해설

다음 그림에서

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} \\ & + \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} \\ & = \overline{AP} + \overline{BP} \text{를 의미 하므로} \\ & \overline{AP} + \overline{BP} \geq \overline{AB} \end{aligned}$$

그러므로 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은

$$\overline{AB} = \sqrt{(3+1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{5}$$



15. 두 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 와 $y = kx + 2k + 1$ 이 제 1 사분면에서 만날 때,
 k 의 값의 범위는?

㉠ $-\frac{1}{6} < k < \frac{1}{2}$

㉡ $-\frac{3}{2} < k < \frac{1}{2}$

㉢ $-\frac{1}{6} < k < 2$

㉣ $-\frac{1}{6} < k < 1$

㉤ $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$

해설

$$y = -\frac{1}{2}x + 2 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$y = kx + 2k + 1 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡ 을 k 에 대하여 정리하면

$$k(x + 2) + (1 - y) = 0 \text{ 이므로}$$

k 의 값에 관계없이 정점 $C(-2, 1)$ 을 지난다.

㉠, ㉡이 제1 사분면에서 만날 조건은

그림에서 직선 AC, BC 사이를 직선 ㉡이 지나야 한다.

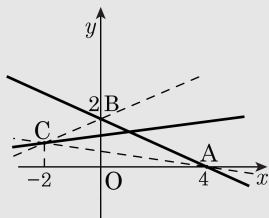
$$\overline{AC} \text{의 기울기는 } -\frac{1}{6},$$

$$\overline{BC} \text{의 기울기는 } \frac{1}{2}$$

따라서 기울기 k 는 $-\frac{1}{6}$ 보다 커야하고

$\frac{1}{2}$ 보다 작아야 제 1 사분면에서 만난다.

$$\therefore -\frac{1}{6} < k < \frac{1}{2}$$



16. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + (m+1)x + (m^2-1) = 0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값을 구하면? (단, m 은 실수이다.)

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$D = (m+1)^2 - 4(m^2-1) \geq 0, 3m^2 - 2m - 5 \leq 0, (3m-5)(m+1) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq m \leq \frac{5}{3}$$

근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta = -(m+1), \alpha\beta = m^2 - 1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= \{-(m+1)\}^2 - 2(m^2 - 1)$$

$$= -m^2 + 2m + 3 = -(m-1)^2 + 4$$

따라서, 구하는 최솟값은 0 ($m = -1$ 일 때)

17. 양의 유리수 a 에 대하여 $(n-1)^2 \leq a \leq n^2$ 을 만족하는 정수 n 을 $[a]$ 로 나타내기로 한다. 즉, $2^2 \leq 6 \leq 3^2$ 이면 $[6] = 3$ 이 된다. $[x] = 5$, $[y] = 9$ 일 때, $[y-x]$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

▷ 정답 : 8

▷ 정답 : 9

해설

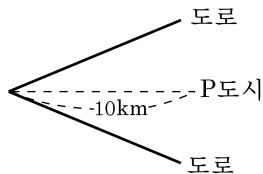
$$[x] = 5 \text{ 이므로 } 4^2 \leq x \leq 5^2 \quad \therefore 16 \leq x \leq 25$$

$$[y] = 9 \text{ 이므로 } 8^2 \leq y \leq 9^2 \quad \therefore 64 \leq y \leq 81$$

$y-x$ 의 범위를 구하면 $39 \leq y-x \leq 65$

즉, $6^2 \leq y-x \leq 9^2$ 이므로 $[y-x]$ 가 될 수 있는 값은 7, 8, 9 이다.

18. 다음 그림과 같이 두 개의 도로가 45° 의 각도로 교차하고 있다. 두 도로의 교차점에서 10km 떨어진 도시 P와 두 도로 사이를 연결하는 삼각형 모양의 새로운 도로를 건설할 때, 건설해야 할 도로의 최소 길이는?



① $10\sqrt{2}$ km

② $12\sqrt{2}$ km

③ $14\sqrt{2}$ km

④ $16\sqrt{2}$ km

⑤ $18\sqrt{2}$ km

해설

두 도로에 대한 점 P의 대칭점을 각각 P' , P'' 이라 하면, $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP} =$

$$\overline{P'Q} + \overline{QR} + \overline{RP''} \geq \overline{P'P''}$$

두 길의 교점을 O 라 하면

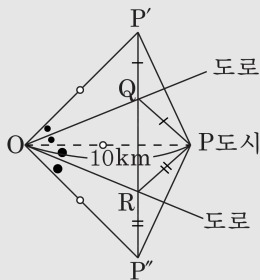
$$\overline{PO} = \overline{P'O} = \overline{P''O} = 10 \text{ 이고}$$

두 도로가 이루는 각이 45° 이므로

$$\angle P'OP'' = 90^\circ$$

따라서 피타고라스 정리에 의하여 새

로운 도로의 합의 최솟값은 $\overline{P'P''} = 10\sqrt{2}$ km 이다.



19. 두 점 A(-8, -2), B(2, 8) 에 대하여 원 $x^2 + y^2 = 27$ 위를 움직이는 점을 P 라고 할 때, $\triangle ABC$ 의 무게 중심 G 는 어떻게 움직이는가?

① $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$

② $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$

③ $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 2$

④ $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 3$

⑤ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$

해설

$$P(a, b) \quad a^2 + b^2 = 27$$

$$\begin{aligned} \text{무게중심 } G(x, y) &= \left(\frac{-8 + 2 + a}{3}, \frac{-2 + 8 + b}{3} \right) \\ &= \left(\frac{a-6}{3}, \frac{b+6}{3} \right) \end{aligned}$$

$$X = \frac{a-6}{3}, \quad Y = \frac{b+6}{3}$$

$$a = 3X + 6, \quad b = 3Y - 6 \quad a^2 + b^2 = 27 \text{ 에 대입하면,}$$

$$(3X + 6)^2 + (3Y - 6)^2 = 27$$

$$\therefore (X + 2)^2 + (Y - 2)^2 = 3$$

$$\text{따라서 } G(X, Y) \text{ 의 자취는 } (x+2)^2 + (y-2)^2 = 3$$

20. 직선 $y = 2x + 1$ 을 직선 $y = x - 1$ 에 대하여 대칭이동 시킬 때, 이동된 도형의 방정식을 구하면?

① $x - 2y - 3 = 0$

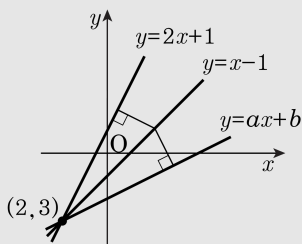
② $x - 2y - 4 = 0$

③ $2x - 3y + 3 = 0$

④ $2x - 3y + 4 = 0$

⑤ $2x - 3y + 5 = 0$

해설



i) 먼저 $y = 2x + 1$ 과 $y = x - 1$ 의 교점을 구하면 $(2, 3)$ 이다.
그리고 이점은 $y = ax + b$ 를 지난다.

$$\therefore 3 = 2a + b$$

ii) 그리고 $y = x - 1$ 의 임의의 점에서

$y = 2x + 1$, $y = ax + b$ 에 이르는 거리는 같다.

$y = ax + b$ 와의 거리 :

$$\frac{|a + 0 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{|a + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

i) 에서 구한

$2a + b = 3$ 을 이용하여 연립하면

$$a = 2, b = 1 \text{ 또는 } a = \frac{1}{2}, b = -2$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x - 2$$

($\because y = 2x + 1$ 는 두 직선이 일치)