1. 다음 등식이 x에 대한 항등식이 되도록 실수 a, b, c의 값을 구하여라.

$$ax^2 - x + c - 3 = 2x^2 - bx - 2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 1$

▷ 정답 : $c = 1$

해설

각 항의 계수를 서로 비교한다.

2. 임의의 실수 x에 대하여 $x^2-3x+2=a+bx+cx(x-1)+dx(x-1)(x-2)$가 항상 성립할 때, $a+b+c+d$의 값을 구하면? (단, a, b, c, d는 상수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x=0$을 대입하면 $a=2$
$x=1$을 대입하면 $b=-2$
$x=2$을 대입하면 $c=1$
3차항은 없으므로$d=0$
$\therefore\ a+b+c+d=1$

3. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}$을 만족하는 모든 실수 x, y에 대하여 항상 $ax+by+5=0$이다. 이때 $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=t$라 하면

$x=2t-1,\ y=3t+1$

이것을 $ax+by+5=0$에 대입하면

$a(2t-1)+b(3t+1)+5=0$

$(2a+3b)t+(-a+b+5)=0$

이 식이 모든 실수 t에 대하여 성립해야 하므로

$2a+3b=0\cdots①$

$-a+b+5=0\cdots②$

①, ②를 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-2 \quad \therefore\ a+b=3+(-2)=1$

해설

$\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \Leftrightarrow AD=BC$ 성질 이용

$3x+3=2y-2$

$3x-2y+5=0$은 $ax+by+5=0$

$\therefore a=3,\ b=-2$

4. 다항식 $x^3 - 2x^2 + 5x - 6$을 일차식 $x - 2$로 나눌 때의 나머지는?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$$
$$= (x-2)Q(x) + R$$

$$\therefore\ f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 6$$
$$= 8 - 8 + 10 - 6$$
$$= 4$$

$$\therefore\ R = 4$$

5. 다항식 $f(x) = x^3 + 3x^2 + kx - k$가 $x+1$로 나누어떨어지도록 상수 k의 값을 정하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

즉, $f(-1) = 0$ 이므로

$f(-1) = -1 + 3 - k - k = 0, \quad \therefore \ k = 1$

6. $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$ 일 때, $f(x)-2=x(x^2-1)+a(x-x^2)+b(x^2-1)$ 가 항상 성립하도록 하는 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)-2=x^3-3x^2+3x-1$ 이므로

$x^3-3x^2+3x-1=x(x^2-1)+a(x-x^2)+b(x^2-1)$

$=x^3+(-a+b)x^2+(a-1)x-b\cdots$ ㉠

㉠이 x 에 대한 항등식이므로 양변의 차수가 같은 항의 계수가 같아야 한다.

즉, $-a+b=-3$, $a-1=3$, $b=1$

이므로 $a=4$, $b=1$

$\therefore\ a+b=5$

7. 다음 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립할 때, xy의 값을 구하여라.

$$(2k+3)x+(3k-1)y+5k-9=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

k에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(2x+3y+5)k+(3x-y-9)=0$

이것은 k에 대한 항등식이므로

$2x+3y+5=0$

$3x-y-9=0$

연립방정식을 풀면 $x=2,\ y=-3$

$\therefore\ xy=2\times(-3)=-6$

8. 다항식 $x^3 + ax + b$가 다항식 $x^2 - x + 1$로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로
$x^2 = x - 1$을 대입하면
$ax + (b - 1) = 0$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로,
$a = 0, b - 1 = 0$
$\therefore\ a = 0,\ b = 1$
$\therefore a + b = 1$

해설

$x^3 + ax + b$
$= (x^2 - x + 1)Q(x)$
$= (x^2 - x + 1)(x + b)$
$\therefore\ b = 1,\ a = 0$

9. 다항식 ax^3+bx^2-4 가 x^2+x-2로 나누어 떨어지도록 a, b를 정할 때, a와 b의 곱을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$ax^3+bx^2-4=(x^2+x-2)Q(x)$

$=(x-1)(x+2)Q(x)$

양변에 $x=1, x=-2$ 를 각각 대입하면

$a+b-4=0,\ -8a+4b-4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=3$

$\therefore\ ab=3$

해설

$ax^3+bx^2-4=(x^2+x-2)(ax+2)$

우변을 전개하여 계수를 비교하면

$a=1,\ b=3\ \therefore\ ab=3$

10. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - k$ 가 $x - 2$를 인수로 가질 때, k를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$를 인수로 갖는다는 것은 $f(x)$가 $x - 2$로 나누어 떨어진다는 뜻이다.

즉, $f(2) = 0$을 만족시키는 k를 구하면,

$f(2) = 2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 - k = 0$

$\therefore\ k = 6$

11. 다항식 $f(x)=x^3+2x^2-x+k$가 일차식 $x-1$을 인수로 가질 때, 이 다항식 $f(x)$를 인수분해 하면?

① $(x-2)(x-1)(x+1)$ ② $(x-1)x(x+2)$

③ $(x+1)(x-1)(x+2)$ ④ $(x-2)(x-1)(x+2)$

⑤ $(x-2)(x+1)(x+2)$

해설

$f(x)=(x-1)Q(x) \Rightarrow f(1)=0$

$\therefore f(1)=2+k=0, \quad \therefore k=-2$

즉, $f(x)=x^3+2x^2-x-2$

$=(x-1)(x+1)(x+2)$

12. x에 관계없이 $\dfrac{x-a}{2x-b}$가 항상 일정한 값을 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $\dfrac{b}{a}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\dfrac{x-a}{2x-b} = k$라 놓으면,

$(2k-1)x + (a-bk) = 0$

$\therefore\ 2k-1=0,\ a=bk$이므로

$k = \dfrac{1}{2},\ a = \dfrac{1}{2}b$이다.

$\therefore \dfrac{b}{a} = 2$

13. $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx - 12$가 $x - 1$로는 나누어 떨어지고, $x + 1$로 나누었을 때는 나머지가 -14이다. 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① -12 ② 12 ③ -20 ④ 20 ⑤ -36

해설

나머지 정리에 의해 $f(1) = 0, f(-1) = -14$

$f(1) = 3 + a + b - 12 = 0 \cdots ①$

$f(-1) = -3 + a - b - 12 = -14 \cdots ②$

①, ②를 연립하면, $a = 5,\ b = 4$

$\therefore\ ab = 20$

14. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(0)$ 의 값은?

① $2f(1) - f(2)$

② $2\{f(1) + f(2)\}$

③ $2(1) + f(2)$

④ $4\{f(1) + f(2)\}$

⑤ $4\{f(1) - f(2)\}$

해설

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + ax + b$$
$$= (x - 1)(x - 2)Q(x) + ax + b$$

$R(x) = ax + b,\ R(0) = b$

$f(1) = a + b,\ f(2) = 2a + b$

$2f(1) - f(2) = b$

15. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눌 때의 나머지는 3이고, $x-2$로 나눌 때의 나머지는 1이다. 이 다항식을 $(x-1)(x-2)$로 나눌 때의 나머지를 구하면?

① $-2x+1$ ② $-2x-1$ ③ $-2x+3$

④ $-2x+5$ ⑤ $-2x+7$

해설

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$ 라 하면,
$f(1)=3,\ f(2)=1$ 이므로
$f(1)=a+b=3,\ f(2)=2a+b=1$ 연립하면
$a=-2,\ b=5$
$\therefore$ 나머지는 $-2x+5$ 이다.

16. 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$로 나누면 나머지는 -4이고, 그 몫을 $x+2$로 나누면 나머지는 2이다. 이때, $f(x)$를 $x+2$로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$f(x)=(2x-1)Q(x)-4$라 하면
$f(-2)=-5Q(-2)-4$
그런데 $Q(-2)=2$ 이므로 $f(-2)=-14$

17. 다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 나머지가 $-x+4$이다. 다항식 $f(x+1)$을 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x+1$ ② $-x+3$ ③ $x-1$

④ $2x$ ⑤ $2x-3$

해설

$f(x)=(x^2-4)P(x)-x+4$

$=(x+2)(x-2)P(x)-x+4$

$\therefore\ f(-2)=6,\ f(2)=2$

$f(x+1)=(x^2+2x-3)Q(x)+ax+b$

$=(x+3)(x-1)Q(x)+ax+b$

$x=-3$을 대입하면 $f(-2)=-3a+b=6$

$x=1$을 대입하면 $f(2)=a+b=2$

$\therefore\ a=-1,\ b=3$

따라서 나머지는 $-x+3$

18. 다항식 $2x^3 + 3x^2 + ax + b$가 $x + 2$로 나누어 떨어질 때, $2a - b$의 값은?

① 28 ② 12 ③ 6 ④ -4 ⑤ -12

해설

준식을 $f(x)$라 하면 $f(-2) = 0$이므로

$-16 + 12 - 2a + b = 0$에서 $2a - b = -4$

19. x에 대한 다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

k	1	a	-1	b
		c	d	a
	1	4	3	5

① $a=3$ ② $b=2$ ③ $c=1$

④ $d=4$ ⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

1	1	a	-1	b
		1	$a+1$	a
	1	$a+1$	a	$b+a$

$k=1, a=3, b=2, c=1, d=4$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

20. 임의의 실수 x에 대하여 $2x^3-5x+2 = a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 가 성립할 때, $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$ 의 값을 구하면?

① 56 ② 28 ③ −28 ④ −46 ⑤ −56

해설

a, b, c, d 는 $2x^2 - 5x + 2$ 를 $(x + 1)$ 로 계속 나눠 줄때 나오는 나머지이다.

조립제법을 이용해 보면

−1	2	0	−5	2	
		−2	2	3	
−1	2	−2	−3	5	← d
		−2	4		
−1	2	−4	1	← c	
		−2			
−1	2	−6	← b		
	↑				
	a				

$\therefore a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2^2 - (-6)^2 + 1^2 - 5^2 = -56$

21. 등식 $\dfrac{2x^2+13x}{(x+2)(x-1)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x+2}$ 가 x에 대한 항등식이 되도록 상수 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

양변에 $(x+2)(x-1)^2$을 곱하면

$2x^2+13x=A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2$ 에서

$x=1,\ -2,\ 0$을 차례로 대입하여 A, B, C를 구하면

$B=5,\ C=-2,\ A=4$

$\therefore\ A+B+C=7$

22. x에 대한 항등식 $(1+2x-x^2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$ 에서 $3a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10}$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

i) 항등식의 상수항 : $a_0 = 1$

ii) 항등식에 $x = 1, x = -1$을 대입하여 식을 만든다.

$x = 1$을 대입하면 $2^5 = a_0 + a_1 + \cdots + a_{10} \cdots ①$

$x = -1$을 대입하면 $(-2)^5 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \cdots + a_{10} \cdots ②$

$① + ②$: $0 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10})$

$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10} = 0$

$3a_0 + a_2 + a_4 + \cdots a_{10} = 2 (\because a_0 = 1)$

23. x에 대한 항등식 $(x^2-x-1)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$ 에서 $a_1 + a_3 + a_5$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면,

$-1 = a_0 + a_1 + \cdots + a_6 \quad \cdots$㉠

양변에 $x = -1$을 대입하면,

$1 = a_0 - a_1 + \cdots + a_6 \quad \cdots$㉡

㉠ − ㉡: $-2 = 2(a_1 + a_3 + a_5)$

$\therefore\ a_1 + a_3 + a_5 = -1$

24. $(1-x-x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{49}x^{49} + a_{50}x^{50}$ 이라 할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2^{24} ④ 2^{25} ⑤ 2^{50}

해설

$(1-x-x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{50}x^{50}$

$x = 1$을 양변에 대입하면

$-1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} \cdots ①$

$x = -1$을 양변에 대입하면

$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{49} + a_{50} \cdots ②$

① + ②: $2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}) = 0$

$a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{50} = 0$

25. x에 대한 다항식 $f(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 나머지는 $2x-7$이고, $x^2-3x-10$으로 나누었을 때의 나머지는 11이다. 이 다항식 $f(x)$를 x^2-6x+5로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x+1$ ② $4x+3$ ③ $x-1$

④ $4x-9$ ⑤ $2x-3$

해설

$f(x)$를 x^2-6x+5로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$$f(x) = (x^2-6x+5)Q(x)+ax+b$$
$$= (x-1)(x-5)Q(x)+ax+b \cdots ㉠$$

$f(x)$를 x^2-4x+3으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$,
$x^2-3x-10$으로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$$f(x) = (x^2-4x+3)Q_1(x)+2x-7$$
$$= (x-1)(x-3)Q_1(x)+2x-7$$

$$f(x) = (x^2-3x-10)Q_2(x)+11$$
$$= (x-5)(x+2)Q_2(x)+11$$

이므로 $f(1)=-5$, $f(5)=11$이다.
㉠에서
$f(1)=a+b=-5$
$f(5)=5a+b=11$이므로 연립하여 풀면
$a=4$, $b=-9$
따라서 구하는 나머지는 $4x-9$이다.