1. 평행이동 $f : (x,\ y) \to (x+a,\ y+b)$ 에 의하여 점 $(2,\ 3)$ 은 점 $(1,\ -1)$ 로 옮겨진다. 이 때, 평행이동 f 에 의하여 원 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ 이 옮겨지는 원의 방정식은?

① $x^2+(y+2)^2=4$
② $x^2+(y-2)^2=4$
③ $(x-1)^2+y^2=4$
④ $(x+1)^2+y^2=4$
⑤ $(x-1)^2+(y+1)^2=4$

해설

$(2+a,\ 3+b)=(1,-1)$
$\therefore a=-1\ ,\ b=-4$
$x^2+y^2-2x-4y+1=0$ 에서
$(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 이 원의 중심 $(1,\ 2)$ 는
평행이동 f에 의하여 $(1-1,\ 2-4)=(0,\ -2)$
로 옮겨지므로
원 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ 이 옮겨지는
원의 방정식은 $x^2+(y+2)^2=4$ 이다.

2. 곡선 $y = x^2 - 2x$ 를 x 축의 방향으로 p 만큼 평행이동하여 곡선 $y = x^2 + ax - 1$ 을 얻었다. $a + p$ 의 값은?

① -3　　② -1　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

곡선 $y = x^2 - 2x$ 를 x 축의 방향으로 p 만큼
평행 이동하면
$y = (x - p)^2 - 2(x - p) = x^2 - 2(p + 1)x + p^2 + 2p$
이 곡선이 $y = x^2 + ax - 1$ 과 같으므로
$-2(p + 1) = a$, $p^2 + 2p = -1$
$\therefore p = -1$, $a = 0$
$\therefore a + p = -1$

3. 직선 $y = ax + b$ 를 평행이동 $f\ :\ (x,\ y)\ \rightarrow\ (x - 1,\ y + 2)$ 에 의하여 옮겼더니 직선 $y = 2x + 3$ 과 y축 위에서 직교할 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = ax + b$ 의 x , y 대신에 각각 $x + 1$, $y - 2$ 를 대입하면
$y - 2 = a(x + 1) + b$
$\therefore y = ax + a + b + 2$
이 직선과 직선 $y = 2x + 3$ 이 y 축 위에서 직교하므로
두 직선의 기울기의 곱은 -1 이고, $(0,\ 3)$ 을 지난다.
$a \times 2 = -1$, $a + b + 2 = 3$
연립하여 풀면
$a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$
$\therefore a - b = -2$

4. 원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 도형이 되었다. 이때 $2m-n$의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$,
즉 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$을
x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼
평행이동한 도형은 중심이 $(-1+m,\ 2+n)$이고
반지름의 길이가 1인 원이다.
이때 두 원이 직선 $y=x$에 대칭이므로
$(-1+m,\ 2+n)=(2,\ -1)$
$m=3,\ n=-3$이므로 $2m-n=9$

5. 점 $(-1, 2)$ 를 원점에 대해 대칭 이동시킨 후, 다시 x 축 방향으로 a 만큼 평행 이동시켰다. 그 후 다시 x 축에 대하여 대칭 이동시킨 후, $y = x$ 에 대해 대칭이동 시켰더니 $(b, 1)$ 이 되었다. 이 때, 상수 $a + b$ 의 값을 구하면?

① -1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$(-1,\ 2)$ 을 원점대칭이동 $\rightarrow (1,\ -2)$
x축 방향으로 a 만큼 평행이동 $\rightarrow (1 + a,\ -2)$
x 축에 대해 대칭이동 $\rightarrow (1 + a,\ 2)$
$y = x$ 에 대해 대칭이동 $\rightarrow (2,\ 1 + a)$
따라서 $b = 2,\ 1 + a = 1,\ a = 0$ 이므로 $a + b = 2$

6. 점 $(a-4, a-2)$ 를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 다음, $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점과 원점 사이의 거리가 2일 때, 처음 점의 좌표를 (p, q) 라 한다. p^2+q^2 의 값을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

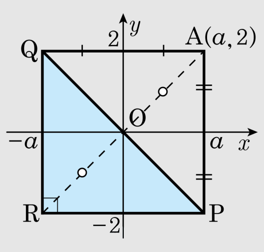
해설

$(a-4, a-2) \to (a, a-2)$
(x 축으로 4만큼 평행이동)
$(a, a-2) \to (a-2, a)$
($y=x$ 에 대칭이동)
$(a-2, a)$ 와 원점 사이의 거리는
$\sqrt{(a-2)^2+a^2}=2$
$2a^2-4a+4=4$,
$\therefore a=2$ $(\because a \neq 0)$
처음 점의 좌표 $(a-4, a-2)$ 에 $a=2$ 를 대입하면
구하는 점의 좌표 $(p,\ q)=(-2,\ 0)$
$\therefore p^2+q^2=4$

7. 점 A $(a, 2)$ 를 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 각각 P, Q, R 라고 할 때, 삼각형 PQR 의 넓이는 20 이다. 이 때, 양수 a 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설



다음 그림에서 점 A $(a, 2)$ 를 x 축에 대하여
대칭이동한 점은 P $(a, -2)$
점 A $(a, 2)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점은 Q $(-a, 2)$
점 A $(a, 2)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점은 R $(-a, -2)$
따라서, 삼각형 PQR 는 $\angle R = 90°$ 인 직각삼각형이다.
이때, $\overline{PR} = 2a$, $\overline{QR} = 4$ 이고
삼각형 PQR 의 넓이는 20 이므로
$\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 4 = 20$
$\therefore a = 5$

8. 직선 $5x+12y+k=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선이 있다. 이 직선에서 점 $(1,\ 1)$ 까지의 거리가 2 일 때, 상수 k 의 모든 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -34

해설

직선 $5x+12y+k=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $5y+12x+k=0$

즉, $12x+5y+k=0$

이 직선과 점 $(1,1)$ 사이의 거리가 2 이므로

$\frac{|12\cdot 1+5\cdot 1+k|}{\sqrt{12^2+5^2}}=2$

$\frac{|17+k|}{13}=2$

$|k+17|=26$

$k+17=\pm 26$

$\therefore k=9$ 또는 $k=-43$

따라서, 구하는 상수 k 의 모든 값의 합은

$9+(-43)=-34$

9. 원 $x^2+y^2-10x-8y+40=0$ 을 직선 $3x+ay+6=0$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $(x+1)^2+(y-8)^2=1$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

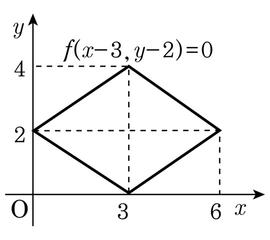
▶ 답 :

▷ 정답 : -2

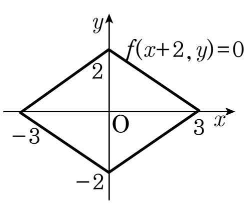
해설

$x^2+y^2-10x-8y+40=0$ 을 표준형으로 나타내면
$(x-5)^2+(y-4)^2=1 \cdots\cdots$ ㉠
㉠은 원 $(x+1)^2+(y-8)^2=1$ 과
직선 $3x+ay+6=0$ 에 대하여 대칭이므로
두 원의 중심 $(5,4)$, $(-1,\ 8)$ 을 이은 선분의
중점이 직선 $3x+ay+6=0$ 위에 있다.
두 점 $(5,4),(-1,8)$ 을 이은 선분의 중점은
$\left(\frac{5+(-1)}{2}, \frac{4+8}{2}\right)$, 즉 $(2,6)$ 이므로
$3\cdot 2+a\cdot 6+6=0$
$\therefore a=-2$

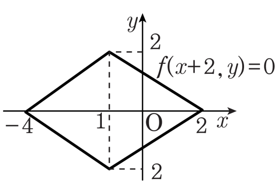
10. 방정식 $f(x-3, y-2) = 0$ 이 나타내는 도형이 다음 그림과 같을 때 방정식 $f(x+2, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?



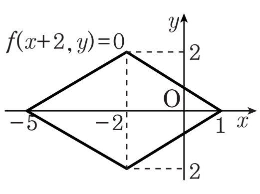
①



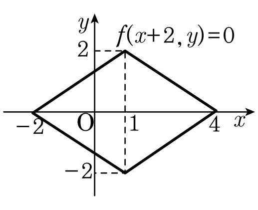
②



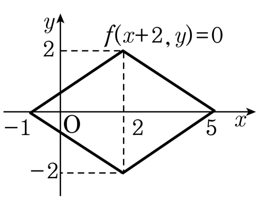
③



④

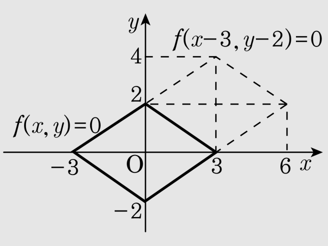


⑤

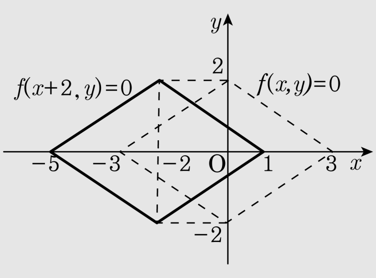


해설

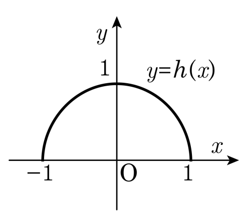
주어진 $f(x-3, y-2) = 0$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면
다음 그림과 같이 $f(x, y) = 0$ 의 그래프를 얻을 수 있다.



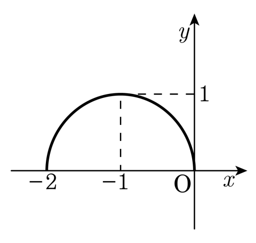
$f(x+2, y) = 0$ 은 $f(x, y) = 0$ 을
x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.



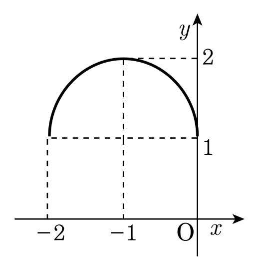
11. 함수 $y = f(x)$ 에 대하여 $g(x) = f(x-2)+1$, $h(x) = g(x+1)-2$ 라고 할 때, $y = h(x)$ 의 그래프는 그림과 같이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1 인 원의 일부이다. 이 때, 다음 중 $y = f(x)$ 의 그래프로 옳은 것은?



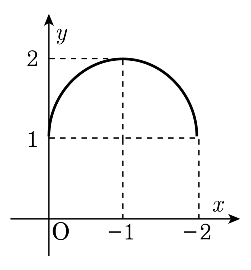
①



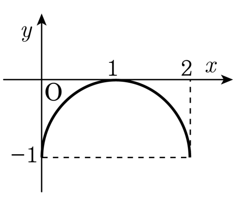
②



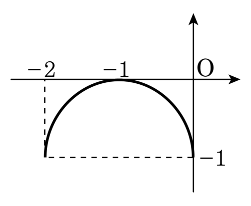
③



④

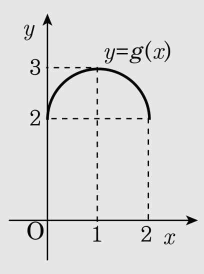


⑤

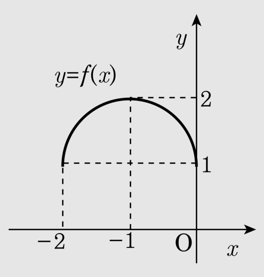


해설

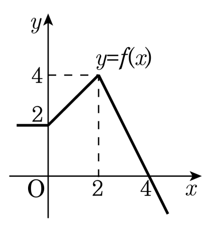
$y = h(x)$ 의 그래프는 $y = g(x)$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 -1 만큼,
y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로
$y = g(x)$ 의 그래프는 $y = h(x)$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼
평행이동한 것이다.
따라서, $y = g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

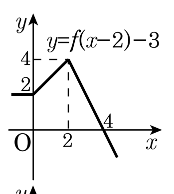


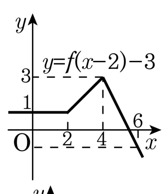
또, $y = g(x)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼
평행이동한 것이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는
$y = g(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼,
y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.
따라서, $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

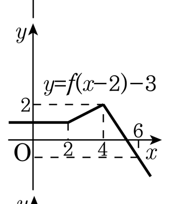


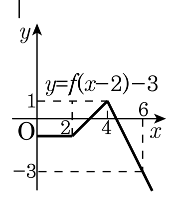
12. 방정식 $y=f(x)$ 가 나타내는 도형이 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $y=f(x-2)-3$ 이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?

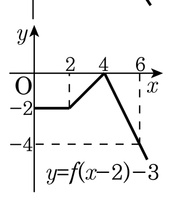


①


②


③


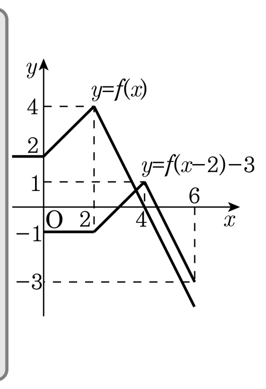
④


⑤


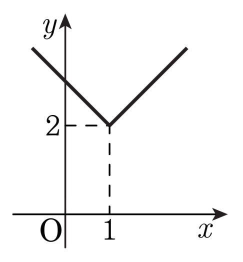
해설

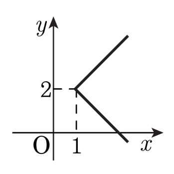
$y=f(x-2)-3 \Leftrightarrow y+3=f(x-2)$ 이므로 구하는 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이다.

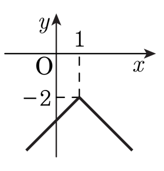
따라서, 구하는 그래프는 다음 그림과 같다.

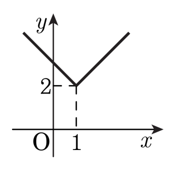


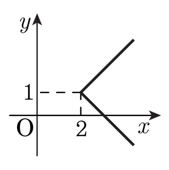
13. 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형이 아래 그림과 같을 때, 다음 중 방정식 $f(y, x) = 0$ 이 나타내는 도형은?

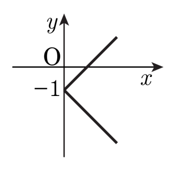


①


②


③


④


⑤


해설

도형 $f(x, y) = 0$ 을 $y = x$ 에 대해 대칭이동하면 $f(y, x) = 0$ 이 된다.
따라서 (1, 2) 는 (2, 1) 로 이동되며,
도형 전부를 대칭이동하면 4 번의 그림이 된다.

14. 점 $(1,\ 2)$ 를 점 $(a,\ b)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $x+2y-1=0$ 은 직선 $x+2y-4=0$ 으로 이동하였다. 이때, $a+2b$ 의 값을 구하면?

① 2　　② 6　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

x 축으로 m , y 축으로 n 만큼 평행이동했다고 하면,
$(x-m)+2(y-n)-1=0$, $x+2y-m-2n-1=0$을
$x+2y-4=0$ 과 비교해 보면,
$-m-2n=-3$ $\cdots$ ㉠
점 $(1,\ 2)$ 를 x 축으로 m , y 축으로 n 만큼 평행이동 시키면,
$(1+m,\ 2+n)$
$\Rightarrow\ \ 1+m=a,\ \ 2+n=b$
$\Rightarrow\ \ a+2b=m+1+4+2n=8$
($\because$ ㉠에서 $m+2n=3$)

15. 다음과 같은 두 연산 장치 ㉮, ㉯가 있다.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & \boxed{㉮} \arrow[r] & (x+a,\ y+b) \\ (x, y) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & \boxed{㉯} \arrow[r] & (-x,\ -y) \end{tikzcd}$$

원 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$가 연산 장치 ㉮와 ㉯를 연속하여 통과하면서 원 $x^2+y^2=r^2$으로 출력되었다. 이때, $a^2+b^2+r^2$의 값은?

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

해설

원의 중심만 따로 생각한다.

$(3,4) \xrightarrow{가} (3+a, 4+b) \xrightarrow{나} (-3-a, -4-b)$

$\Rightarrow \quad (-3-a, -4-b) = (0,0)$

$\therefore \quad a=-3, \quad b=-4, \quad r=5$

$a^2+b^2+r^2=50$

16. 직선 $x - 3y + 1 = 0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동한 직선이 원 $(x - m)^2 + (y - n)^2 = 5$ 의 넓이를 이등분할 때, $3m + n$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$x - 3y + 1 = 0$ 의 x 축 대칭 $(y \to -y)$

$\to \ x + 3y + 1 = 0$

$x + 3y + 1 = 0$ 의 $y = -x$ 축 대칭 $(x \to -y,\ y \to -x)$

$\to \ -y - 3x + 1 = 0,\ \ y = -3x + 1$

이 직선이 $(x - m)^2 + (y - m)^2 = 5$ 의 넓이를

이등분하므로 $(m,\ n)$ 을 지난다.

$\therefore\ 3m + n = 1$

17. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{B}(4,\ m)$ 과 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A′ 라 하면
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{AB}}$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은 선분 A′B 의 길이와 같다.
점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{A'}(1,\ -3)$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은
$\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{(4-1)^2+(m+3)^2}=5$
$(m+3)^2+9=25$, $(m+3)^2=16$
$m+3=\pm4 \quad \therefore\ m=1\ (\because\ m>0\ )$