

1. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$ 에 의하여 점 $(2, 3)$ 은 점 $(1, -1)$ 로 옮겨진다. 이 때, 평행이동 f 에 의하여 원 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ 이 옮겨지는 원의 방정식은?

① $x^2 + (y+2)^2 = 4$

② $x^2 + (y-2)^2 = 4$

③ $(x-1)^2 + y^2 = 4$

④ $(x+1)^2 + y^2 = 4$

⑤ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$

해설

$$(2+a, 3+b) = (1, -1)$$

$$\therefore a = -1, b = -4$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \text{ 에서}$$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ 이 원의 중심 $(1, 2)$ 는
평행이동 f 에 의하여 $(1-1, 2-4) = (0, -2)$
로 옮겨지므로

원 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ 이 옮겨지는
원의 방정식은 $x^2 + (y+2)^2 = 4$ 이다.

2. 곡선 $y = x^2 - 2x$ 를 x 축의 방향으로 p 만큼 평행이동하여 곡선 $y = x^2 + ax - 1$ 을 얻었다. $a + p$ 의 값은?

① -3

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

곡선 $y = x^2 - 2x$ 를 x 축의 방향으로 p 만큼
평행 이동하면

$$y = (x - p)^2 - 2(x - p) = x^2 - 2(p + 1)x + p^2 + 2p$$

이 곡선이 $y = x^2 + ax - 1$ 과 같으므로

$$-2(p + 1) = a, \quad p^2 + 2p = -1$$

$$\therefore p = -1, \quad a = 0$$

$$\therefore a + p = -1$$

3. 직선 $y = ax + b$ 를 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x - 1, y + 2)$ 에 의하여 옮겼더니 직선 $y = 2x + 3$ 과 y 축 위에서 직교할 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = ax + b$ 의 x, y 대신에 각각 $x + 1, y - 2$ 를 대입하면

$$y - 2 = a(x + 1) + b$$

$$\therefore y = ax + a + b + 2$$

이 직선과 직선 $y = 2x + 3$ 이 y 축 위에서 직교하므로
두 직선의 기울기의 곱은 -1 이고, $(0, 3)$ 을 지난다.

$$a \times 2 = -1, a + b + 2 = 3$$

연립하여 풀면

$$a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a - b = -2$$

4. 원 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하였더니 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭인 도형이 되었다. 이때 $2m - n$ 의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$$\text{원 } x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0,$$

$$\text{즉 원 } (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1 \text{을}$$

x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼
평행이동한 도형은 중심이 $(-1 + m, 2 + n)$ 이고
반지름의 길이가 1인 원이다.

이때 두 원이 직선 $y = x$ 에 대칭이므로

$$(-1 + m, 2 + n) = (2, -1)$$

$$m = 3, n = -3 \text{이므로 } 2m - n = 9$$

5. 점 $(-1, 2)$ 를 원점에 대해 대칭 이동시킨 후, 다시 x 축 방향으로 a 만큼 평행 이동시켰다. 그 후 다시 x 축에 대하여 대칭 이동시킨 후, $y = x$ 에 대해 대칭이동 시켰더니 $(b, 1)$ 이 되었다. 이 때, 상수 $a + b$ 의 값을 구하면?

① -1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$(-1, 2)$ 을 원점대칭이동 $\rightarrow (1, -2)$

x 축 방향으로 a 만큼 평행이동 $\rightarrow (1 + a, -2)$

x 축에 대해 대칭이동 $\rightarrow (1 + a, 2)$

$y = x$ 에 대해 대칭이동 $\rightarrow (2, 1 + a)$

따라서 $b = 2, 1 + a = 1, a = 0$ 이므로 $a + b = 2$

6. 점 $(a-4, a-2)$ 를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 다음, $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점과 원점 사이의 거리가 2일 때, 처음 점의 좌표를 (p, q) 라 한다. $p^2 + q^2$ 의 값을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$(a-4, a-2) \rightarrow (a, a-2)$$

(x 축으로 4만큼 평행이동)

$$(a, a-2) \rightarrow (a-2, a)$$

($y=x$ 에 대칭이동)

$(a-2, a)$ 와 원점 사이의 거리는

$$\sqrt{(a-2)^2 + a^2} = 2$$

$$2a^2 - 4a + 4 = 4,$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a \neq 0)$$

처음 점의 좌표 $(a-4, a-2)$ 에 $a=2$ 를 대입하면

구하는 점의 좌표 $(p, q) = (-2, 0)$

$$\therefore p^2 + q^2 = 4$$

7. 점 A($a, 2$)를 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 각각 P, Q, R라고 할 때, 삼각형 PQR의 넓이는 20이다. 이 때, 양수 a 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

다음 그림에서 점 A($a, 2$)를 x 축에 대하여

대칭이동한 점은 P($a, -2$)

점 A($a, 2$)를 y 축에 대하여 대칭이동한 점은 Q($-a, 2$)

점 A($a, 2$)를 원점에 대하여 대칭이동한 점은 R($-a, -2$)

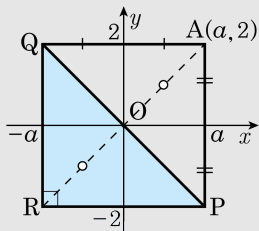
따라서, 삼각형 PQR는 $\angle R = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

이때, $\overline{PR} = 2a$, $\overline{QR} = 4$ 이고

삼각형 PQR의 넓이는 20이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 4 = 20$$

$$\therefore a = 5$$



8. 직선 $5x + 12y + k = 0$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 직선이 있다. 이 직선에서 점 $(1, 1)$ 까지의 거리가 2 일 때, 상수 k 의 모든 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -34

해설

직선 $5x + 12y + k = 0$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여
대칭이동한 직선의 방정식은 $5y + 12x + k = 0$

즉, $12x + 5y + k = 0$

이 직선과 점 $(1, 1)$ 사이의 거리가 2 이므로

$$\frac{|12 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + k|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = 2$$

$$\frac{|17 + k|}{13} = 2$$

$$|k + 17| = 26$$

$$k + 17 = \pm 26$$

$$\therefore k = 9 \text{ 또는 } k = -43$$

따라서, 구하는 상수 k 의 모든 값의 합은

$$9 + (-43) = -34$$

9. 원 $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$ 을 직선 $3x + ay + 6 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $(x+1)^2 + (y-8)^2 = 1$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$ 을 표준형으로 나타내면

$$(x-5)^2 + (y-4)^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

⑦은 원 $(x+1)^2 + (y-8)^2 = 1$ 과

직선 $3x + ay + 6 = 0$ 에 대하여 대칭이므로
두 원의 중심 $(5, 4)$, $(-1, 8)$ 을 이은 선분의
중점이 직선 $3x + ay + 6 = 0$ 위에 있다.

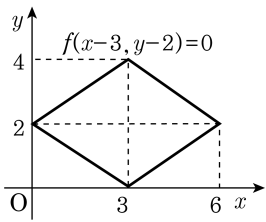
두 점 $(5, 4)$, $(-1, 8)$ 을 이은 선분의 중점은

$$\left(\frac{5+(-1)}{2}, \frac{4+8}{2} \right), \text{ 즉 } (2, 6) \text{ 이므로}$$

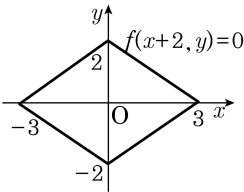
$$3 \cdot 2 + a \cdot 6 + 6 = 0$$

$$\therefore a = -2$$

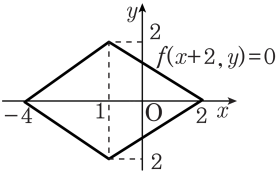
10. 방정식 $f(x-3, y-2) = 0$ 이 나타내는 도형이 다음 그림과 같을 때 방정식 $f(x+2, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 좌표 평면 위에 바르게 나타낸 것은?



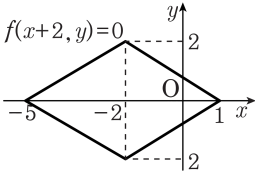
①



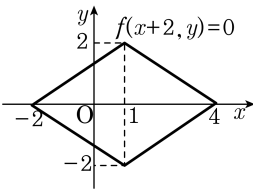
②



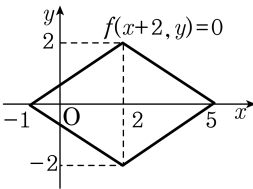
③



④



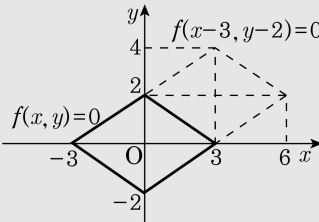
⑤



해설

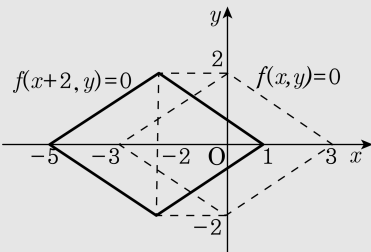
주어진 $f(x-3, y-2) = 0$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면
다음 그림과 같이 $f(x, y) = 0$ 의 그래프를 얻을 수 있다.

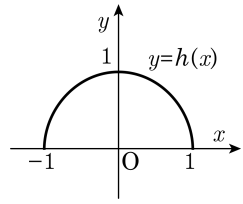


$f(x+2, y) = 0$ 은 $f(x, y) = 0$ 을

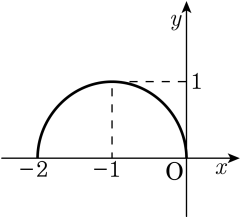
x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.



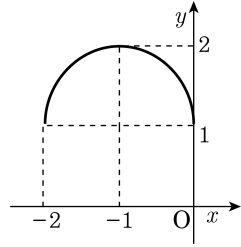
11. 함수 $y = f(x)$ 에 대하여 $g(x) = f(x - 2) + 1$, $h(x) = g(x + 1) - 2$ 라고 할 때, $y = h(x)$ 의 그래프는 그림과 같이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1 인 원의 일부이다. 이 때, 다음 중 $y = f(x)$ 의 그래프로 옳은 것은?



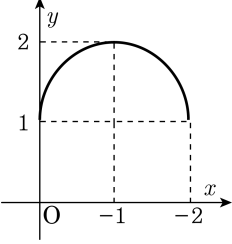
①



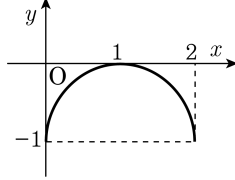
②



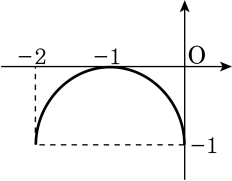
③



④

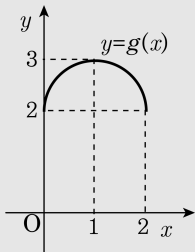


⑤

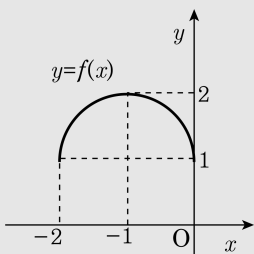


해설

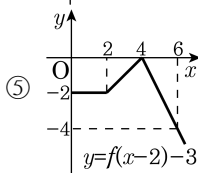
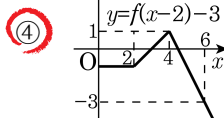
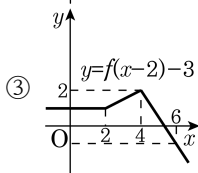
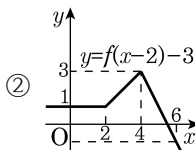
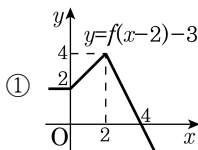
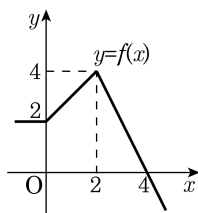
$y = h(x)$ 의 그래프는 $y = g(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로 $y = g(x)$ 의 그래프는 $y = h(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.
따라서, $y = g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



또, $y = g(x)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 $y = g(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.
따라서, $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



12. 방정식 $y = f(x)$ 가 나타내는 도형이 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $y = f(x-2) - 3$ 이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?



해설

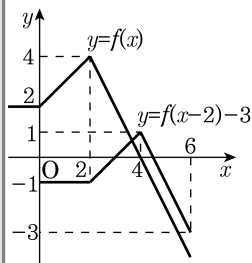
$$y = f(x-2) - 3 \Leftrightarrow y + 3 = f(x-2)$$

이므로 구하는 그래프는

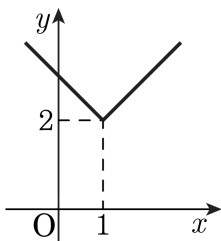
$y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼,

y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이다.

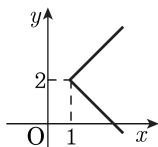
따라서, 구하는 그래프는 다음 그림과 같다.



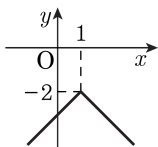
13. 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형이 아래 그림과 같을 때, 다음 중 방정식 $f(y, x) = 0$ 이 나타내는 도형은?



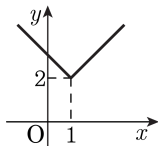
①



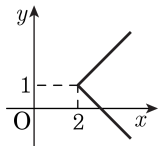
②



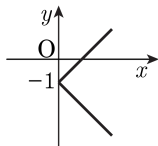
③



④



⑤



해설

도형 $f(x, y) = 0$ 을 $y = x$ 에 대해 대칭이동하면 $f(y, x) = 0$ 이 된다.

따라서 (1, 2) 는 (2, 1) 로 이동되며,
도형 전부를 대칭이동하면 4 번의 그림이 된다.

14. 점 $(1, 2)$ 를 점 (a, b) 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $x+2y-1=0$ 은 직선 $x+2y-4=0$ 으로 이동하였다. 이때, $a+2b$ 의 값을 구하면?

① 2

② 6

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

x 축으로 m , y 축으로 n 만큼 평행이동했다고 하면,
 $(x-m)+2(y-n)-1=0$, $x+2y-m-2n-1=0$ 을
 $x+2y-4=0$ 과 비교해 보면,

$$-m-2n=-3 \cdots \textcircled{7}$$

점 $(1, 2)$ 를 x 축으로 m , y 축으로 n 만큼 평행이동 시키면,
 $(1+m, 2+n)$

$$\Rightarrow 1+m=a, \quad 2+n=b$$

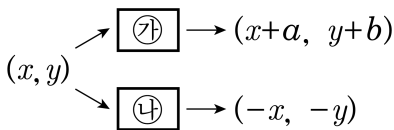
$$\Rightarrow a+2b=m+1+4+2n=8$$

$$(\because \textcircled{7} \text{에서 } m+2n=3)$$

15. 다음과 같은 두 연산 장치 ㉠, ㉡가 있다.

원 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ 가
연산 장치 ㉠과 ㉡를 연속하여

통과하면서 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 으로 출력되었다. 이때, $a^2 + b^2 + r^2$ 의
값은?



① 30

② 35

③ 40

④ 45

⑤ 50

해설

원의 중심만 따로 생각한다.

$$(3, 4) \xrightarrow{\text{㉠}} (3+a, 4+b) \xrightarrow{\text{㉡}} (-3-a, -4-b)$$

$$\Rightarrow (-3-a, -4-b) = (0, 0)$$

$$\therefore a = -3, b = -4, r = 5$$

$$a^2 + b^2 + r^2 = 50$$

16. 직선 $x - 3y + 1 = 0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동한 직선이 원 $(x - m)^2 + (y - n)^2 = 5$ 의 넓이를 이등분할 때, $3m + n$ 의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$x - 3y + 1 = 0$ 의 x 축 대칭 ($y \rightarrow -y$)

$$\rightarrow x + 3y + 1 = 0$$

$x + 3y + 1 = 0$ 의 $y = -x$ 축 대칭 ($x \rightarrow -y, y \rightarrow -x$)

$$\rightarrow -y - 3x + 1 = 0, \quad y = -3x + 1$$

이 직선이 $(x - m)^2 + (y - n)^2 = 5$ 의 넓이를 이등분하므로 (m, n) 을 지난다.

$$\therefore 3m + n = 1$$

17. 두 점 $A(1, 3)$, $B(4, m)$ 과 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 라 하면

$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \geq \overline{AB}$ 이므로

$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 선분 $A'B$ 의 길이와 같다.

점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 $A'(1, -3)$ 이므로

$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은

$$\overline{A'B} = \sqrt{(4-1)^2 + (m+3)^2} = 5$$

$$(m+3)^2 + 9 = 25, (m+3)^2 = 16$$

$$m+3 = \pm 4 \quad \therefore m = 1 \quad (\because m > 0)$$